IO. BAPTISTÆ GUGLIELMINI

DE DIURNO TERRÆ MOTU

EXPERIMENTIS

PHYSICO-MATHEMATICIS

CONFIRMATO

OPUSCULUM.

BONONIÆ
MDCCXCII.
EX TYPOGRAPHIA S. THOMÆ AQUINATIS
SUPERIORUM PERMISSU.

PRÆFATIO.

1. Non inficiabor equidem nonnulla linguarum genera universi orbis nationibus ex optimarum artium studiis, scriptisque innotuisse: ii vero, iudicio meo, falluntur, qui, ut Gallos æmulentur, quæ ad istarum disciplinarum scientiam pertineant opera, vernaculis committunt linguis; perinde quasi suam per se quisque in totum mundum manifestam iri confidat, vel nihil saltem vereatur, ne res ipsæ late diffundi prohibeantur; quod sane utrumque in vitio ponendum est. Hæc ego animo perpendens latinis literis satis ubique notis opusculum mandavi; quamquam futurum plane cernerem, ut in grammaticorum reprehensiones de verborum delectu, atque elegantia incurrerem. Verum si de errore, *qui* ad materiam spectet, accusatus fuero, me defendam, nullum porro unquam a grammaticis iudicium de forma accepturus.

2. Demonstratum iam fuerat, corpus per verticalem lineam sursum iactum, vel deorsum cadens, de normali via deflexurum fuisse, quotiescumque tellus circa suum axem volveretur.

Eo igitur de diurno terræ motu disputatio pervenerat, ut experimento solvenda videretur: quamquam, quod multis placuit, & nonnulli etiam tentare ausi sunt, non erat istiusmodi lis periculosis, incertisque tormentis bellicis dirimenda; quandoquidem ratione longe tutiori, felicique successu, de corporum ab altissimis turribus, tholisque lapsu experimentum capere potuissent.

3. Id ita esse ostendi, & palam feci opusculo, quod Romæ in lucem edidi labente anno millesimo septingentesimo octogesimo nono; quod quidem experimento ipso munitum iam tum sic fuit desideratum, ut Roma ego sequenti anno in patriam reversus me totum ad id munus convertere non hæsitaverim.

4. Præstat autem, antequam longius abeam, opusculum illud ab obiectis vindicare. Etenim ab aliquibus in primis redargutus sum, quasi in id studuerim, ut ea pro novis haberentur, quæ iamdiu in aperto erant: verum quibus freti argumentis id dictitaverint, latet prorsus; neque enim quod proponebam tentamen novum non erat; & si quid notum cadebat in opusculum, quod tamen novitatem posset præ se ferre, illud unde collegissem omni cura adnotabam. Quæ vero publica monumenta opu-

sculum meum propius tangunt, accusantque, tria sunt. Horum primum habetur in Folio *Num. VII. Efemeridi letterarie di Roma*. *Anno* 1790., cuius folii exarator theoriæ meæ basim penitus evertit; negat scilicet, ut verba in pauca conferam, circulorum concentricorum circa communem axem revolutorum velocitates differre; quod sane accusationis genus protulisse sufficiet, ut tamquam falsum refellatur. Alterum videre licet in Volumine *XLIII. Giornale de' Letterati d' Italia*, in quo Iosephus Contarelli me reprehendit, qui argumentis ex telluris figura, atque ex corporum gravitate a polis ad æquatorem decrescente depromptis, prolatisque ad diurnum terræ motum exigendum, congruentiæ tantummodo momentum tribuerim; ea enim apud se, aiebat, vim obtinere demonstrationis: Recte quidem, neque enim id mihi cum ipso non convenit; at quid tum postea? non enim argumenta hæc sunt eiusmodi, quæ in systemate tychoniano cadere, si quidem velis, & explicari non possint. Alia deinde proponit non contemnenda sane, quæ tamen silentio præteribo, cum ex præsenti opusculo satis per se quisque intelligere valeat quid foret reponendum. Theodorus denique Bonati Mathematicus Ferrariensis documentum tertium in medium attulit; sed de hoc infra ; nunc ad experimentum nostrum revertamur .

5. Turris, vulgo *degli Asinelli* dicta, media ferme in urbe nostra a sæculis nonnullis manet, quæ ad tercentorum pedum (de parisiensibus loquar) altitudinem pertingit : ad hanc in via ostium patet, perque cochlidem in centro scanditur ad pedes octo & viginti : hinc in quadram formam surrigitur vertice tenus, quo scalæ ad latera in gyrum fixæ tutum præbent ascensum. Testudine in summitate occluditur, cui parvula turris incumbit, quæ pedibus quinque & triginta eminet, & tintinabulum capit ad civiles usus pulsandum : testudine itidem in ascensus parte tertia dividitur, quam supra planis tabularum duobus, & altero infra, profunditas tanta intercipitur, ne ascendentium oculos obruat, fallatque.

6. Testudine itaque hac perforata, & altera planorum tabula abducta, libera introrsum via ad bis centum & quadraginta pedes corporum lapsui aperiebatur ; quamobrem locum tentamini opportunum, atque accommodatum esse arbitratus sum ; nisi quod ob ostiola pene innumera, quæ fabricationis vestigia sunt, ventis omnibus pervia, rebar iam tum futurum fore, ut a labore meo, flante vento, distinerer.

7.

7. Non me tamen ab opere terruit difficultas ; atque primum quidem ad Illustrissimos, atque Excelsos Munitionis Præfectos me contuli rogaturus, ut publica Turris libere mihi ad experiundum pateret ; qui pro summo, quo bonarum artium cultores prosequuntur amore, turrem mihi meo etiam commodo muniri ultro dederunt. Cæterarum tunc rerum gerendarum narrationem ad Illustrissimos, atque Excelsos Studiorum Præfectos deferendam curavi, illosque, ut sumptum rebus ipsis necessarium suggererent impetraturus conveni ; nec me fefellit opinio, quippe non eram nescius in veteri studiorum nostrorum nomine tuendo non ultimam & ipsos civium laudem reposuisse. Omnis igitur operis in turre suscipiendi facta mihi potestate, constitutaque pecunia, rem inchoavi.

8. Cum ad cadentia corpora in imum fundum excipienda parum spatii, illudque in altera turris parte daretur ; hinc initium sumendum erat, ut quæ sursum via integro, expeditoque corporum lapsui recludenda foret dignosceremus. Hac perpendiculorum auxilio patefacta, sex circiter pedibus a testudine superiori novum tabularum planum substructum est, perque huius centrum nonnihil pertusum dimisimus perpendiculum, probaturi an stratum iter rectum esset, visu-

suri deinde quo loco consistendum, quove corpora ante lapsum essent suspendenda.

9. Duos postea inter fornices parallelos, quibus testudo ipsa fulcitur, trabs horizontaliter collocata est, iisque affixa; huic lapides imposuimus ad testudinis usque summitatem, cui suffigebantur, quos inter & trabem lamina cuprea horizontalis constringebatur, quæ satis se promens rimam ferebat perexili verticali filo traiiciendam: supra laminam uncus manebat: totumque opus calce conglutinatum fuit, atque duratum.

10. Globos interim plumbeos, quorum diameter par erat pedis pollici, bene tornatos, perpolitosque curaveram conficiendos: iis transversum vulnus infligebatur, quod, cute paululum elevata, filum in nodum desinens caperet: nodo subinde introducto, reconditoque, cuteque rursum depressa, vulnus sic sanabatur, ut filum recta e centro prodiisse videretur, ictusque vestigium nullum appareret in superficie. Filo hoc serico, vel lineo, aut metallico per laminæ rimam traiecto, & huius extremitati innixo; uncus ad plures vices circumdatus globum ad alteram pollicis lineam infra laminam pendentem firmiter sustinebat. Globo deniqne quiescente, filum supra laminam cremabamus flamma.

II.

11. Ut quid lamina hæc, inquiet aliquis? lamina munera præstabat tria: filum prope globum dividebat, ut protractæ, diuturnæque vibrationes contraherentur, & brevi cessarent: verticalem corporibus lapsum præfiniebat: vetabat postremo quominus aer a flamma excitatus suppositi globi quietem perturbaret.

12. Filo igitur combusto, fidebam fore ut globus una suæ gravitatis vi pressus motum arriperet verticalem: verticali itaque corporum lapsui ceræ planum in ima turre substraveram, in quod globos deinceps ruentes unam, eamdemque fossam percussuros esse sperabam, quam mox perpendiculo e suspensionis globorum puncto demisso perscrutari constitueram, visurus quantum globi de normali directione declinassent, ac utrum in orientem, anve alio iter inflexissent. Verum duorum globorum, quos quarta horæ parte deieci, neuter inferioris testudinis foramen pervasit: atqui hoc in pedem quadrum patebat, perque illius centrum transibat perpendiculum. Tentamen tribus iteravi diebus eventu prope eodem.

13. Quo vero maiori in discrimine versabatur res mea, eo ego maiori spe erigebar, huius enim aberrationis globorum caussam oportebat, neque tantam esse, cui occurrerepro hibe-

berer, neque tam exiguam, quæ omnem inquirentis eluderet diligentiam. Turris porro ad hasce investigationes longe erat inopportuna; quare domum rem transtuli examinandam.

14. Variis hic modis, quos omnes recensere longum esset, globos suspendi, quos nudis oculis quietos conspicatus, vibrationibus etsi minimis sollicitari adhuc observabam, dum eos per microscopium obtuebar. Post quinque & viginti circiter prima horæ scrupula vibrationes istæ sensim imminutæ subito evanescebant: tunc itaque filum suspensionis frangi mandabam; neque enim ego a microscopio oculos removebam, tanti mihi erat explorare quid contingeret, dum igne, vel corrodentium acidorum vi filum detruncabatur. Hinc etsi flamma libertatem globis citius maturaverit, quam novæ ipsorum vibrationes ob oculos venire quiverint (ut propterea deceptus sim, cum eos omnino quietos discessisse iudicaverim), non parum tamen contulit vidisse globos perfecte iam quietos iterum concitari, dum acidis filum discindebatur: quamobrem combustionis methodo mihi tum probata, acidis posthac abstinendum esse decrevi, nec microscopio unquam parcendum.

15. In cupreo itaque bene lævi cylindro, cuius diameter pedis pollicem paululum excedebat,

canalem axi parallelum fodi ad partis pollicis quartæ profunditatem. Cylindrus hic horizontaliter situs, firmatusque ita, ut canalis rectus emineret, globorum filo in annulum duplicato circumdabatur. Sic globos appendebam: duo tum paralleli circuli cylindrum sibi proxime circumscripti statum locum filo suspensionis designabant ex intervallo: duorum postea perpendiculorum hinc atque illinc a cylindri axe pendentium norma globorum centrum in verticali eiusdem axis plano sistebatur: oculis deinde microscopio armatis globos usque adeo speculabar, donec quievissent: filum tum denique supra canalem cremabam facillime, & nullo excitandi motum timore.

16. Expediebat tamen, & libuit, machinamentum hoc in Instituti, ut aiunt, Scientiarum Ædibus experiri, priusquam illud in turrem deportarem. Specula his ædibus ad astronomicas observationes superstat, quæ vertice tenus scanditur per cocleam in centro normaliter apertam. Coclea porro ad nonaginta pedum altitudinem pertingit, & ab omni externi aeris perturbatione protegitur; ut mihi propterea die quavis, neque irrita opera, in rem meam incumbere concederetur.

17. Anno igitur millesimo septingentesimo no-

nonagesimo, pridie idus Septembris, idibus ipsis, & postridie, adiuvante Aloysio Zanotti, iuvene avos suos æmulante, experimentis operam dedi, tantaque nos gessimus diligentia, ut duabus cuiusque diei horis vix de duobus globis periculum factum sit. Prima die Petronius Matteucci, vir summæ authoritatis, summæque doctrinæ Astronomus opportune adfuit cum secundus globus delaberetur, quem ipse primi globi fossam ad unguem attigisse testabitur. Postridie fossarum neutra hesternæ fossæ concentrica fuit; harum vero cum illa excentricitates, meridionalis altera, altera borealis, ne ad dimidiam quidem pollicis lineam pertinebant. Postrema tandem die globus primus in primæ diei fossam decidit, secundus paululum in austrum prolapsus est. Tunc coram Petronio Matteucci, & huic in astronomica laude adiuncto Francisco Sacchetti viro doctissimo, perpendiculum deductum est, a quo fossarum centra duabus circiter lineis ad orientem spectare conspeximus.

18. Cum filum, quo globi suspendebantur, verticale mansisset post casum fere nunquam, cadentes globos rotari intelleximus: cum autem rotationem hanc ab excentrica ipsorum massa originem ducere suspicaremur, consequens videbatur, ut ab hac eadem caussa proficisceretur fo-

vearum excentricitas. Duos propterea globos sumpsi exteriori superficie integros, perfectosque, quorum alter massam de industria sensibiliter excentricam obtinebat; illosque sequenti periculo subieci. Et primum quidem annulum iis ex filo inserui tantulum (*Parag.* 10.), ut per hunc vix acus ope filum traduceretur, quo annulus conficiebatur cylindro circumvolvendus; sicque consequebar, ut filo huic pro tentamine quoque perusto novum sufficerem, quin globi vulnus renovarem, atque mutarem. Decimo vero kalendas Octobris, quinque horis a meridie usque ad secundam pomeridianam, globos bis ad duas mundi oras ex diametro oppositas eandem faciem obvertentes deinceps suspendi, & octies experimentum institui, repetiique. Exitus porro hic fuit: tribus interdum lineis globi utriusque centrum a perpendiculi directione recessit; neuter vero globorum deviavit plus altero, nulloque aberrationes ordine sibi successerunt: quapropter etsi globos in cadendo detrimentum passos esse intellexerim, caussa tamen saltem non omnis massarum excentricitati inhærere visa est; sed neque culpam omnem in machinamentum traiicere licebat.

19. Quæ vero dubitationibus meis modum poneret, remque in apertum proferret, publica tur-

turris præsto esse videbatur; de qua scilicet orientalem corporum aberrationem expectabam tantam, quantam ne contrarius quidem excentricitatis massarum effectus elisisset. Turrem itaque alacris iterum adivi: sed quæ præter opinionem meam obvenerint fideliter prosequamur.

20. Cum diurno civitatis strepitu, & curruum concursu, turris interdiu perpetuo contremat, nocturnarum horarum silentio negotium nostrum committere, & commendare, remque in plurimam, & tardam quandoque noctem traducere coacti sumus. Interea autem dum nocturnis ventorum præliis ab opere deterrebar, cylindrum ex chalybe, ut levior esset, mihi comparavi, cujus diameter duas pollicis lineas superabat, illumque canale, suisque circulis instructum ad cuprei cylindri similitudinem in turre constitui, ut avulsæ laminæ munere fungeretur. Atque ut primum pax ventis indicta est, & moram rumpere fas fuit, turrem ego, & Senator Alamanus Isolani, vir de patria nostra, æque ac de studiis optime meritus, conscendimus, manentibus ad imum Alfonso Bonfioli Regnantis Pii Papæ Sexti Prælato domestico, viro & literarum, & physicarum rerum scientia ornatissimo; atque Petronio Colliva, iuvene in mathematicis disciplinis spectatissimo, quorum munus

esset, a præfixis in ceræ plano limitibus fossarum distantias emetiri, foveamque pro tentamine unoquoque, adiecta cera, obturatam plano æquare.

21. Prima hæc nox erat, qua sequens annus initium duxerat, & publica spectacula populo redire iubebantur, quibus civitas accurrens turrem nostram frequens præteribat. Quapropter cum primus globus a vibrationibus abstinuisset, iamque prope esset ut filum combureremus, ecce currus in via prætergressus turrem succussit, & globus vibrationibus commotus est inermi oculo conspiciendis; quod ipsum & hac nocte, & aliis in posterum sæpe sæpius accidit, ut multum propterea temporis in experiundo triverimus. Attamen ab hora tertia ad quintam, curruum frequentia imminuta, tres globos periculo dedimus, quos singulos ad planum a nostro secundum pleno ictu offendisse animadvertimus. Descendimus ergo, & quem liberum per huiusmodi planum corporibus lapsum aperueramus, illum tabulis obstructum comperuimus; quam observationem, dum ascendebamus, prætermisisse penituit, sed sero; hac enim de caussa, & quia validus de oriente ventus eruperat, illa nobis nox incassum consumpta est.

22. Ab hora noctis tertia usque ad sextam, tum

tum nonis Ianuarii, tum tertio idus eiusdem, duos globos detrusimus. Primus utriusque noctis silente vento dimissus est, & eamdem prope fossam attigit: qui autem secundo deiecti sunt foveis valde dissitis occurrerunt, quod nobis utique advenisse visum est pro ut res ipsa ferebat, postulabatque; statis enim noctis horis cælum nubibus repente obducebatur, quibus aer concitatus impediebat quominus postremi suspensi globi perfectam quietem carperent ante lapsum: quin imo tertium globum, quem nocte altera, invitis ventis, appenderamus, horam post integram perpetuo, valdeque irrequietum abstraximus, ne tempus ulterius, & operam perderemus.

23. Idibus denique Ianuarii laborem resumpsi ingratissimum; cuius quidem noctis recordatio eo vel acerbissima subit, quia ultima fuit, qua suam præstitit operam charissimus mihi a teneris annis, atque coniunctissimus Petronius Colliva, iuvenis ob probatos mores, atque doctrinam omnibus acceptissimus, de cuius morte urbs tota conquesta est, & dolet usque. Evenit autem hac nocte, ut dum Senator Alamanus Isolani filo quieti globi ignem admoveret, globus mihi ipsum per microscopium inspicienti subito contremere visus sit; quare ne filum cremaretur si-

signum dedi, sed non tam cito, ut huius pars non sit usta; quapropter globus valde concitatus fuit, non tamen distractus. Hic vero denuo quietus, duoque alii deinceps experimentum subierunt; qui fossas ne sese quidem tangentes percusserunt, cœlo nobis cæteroquin favente. Quidni igitur, inquiebam, tantum aberrationum discrimen combustionis vitio tribuero? At enim experimenta in Instituti Ædibus bene verterant? cylindrus itaque accusandus videbatur parvus plus æquo: verum quid cylindro rei erat cum vitiosa fili combustione? concedebam equidem filium tutius, & citius in cylindro maiori aduri posse; at numne accedente flamma filum tum etiam ex parte non cremabatur, tempusculum post aliquod quantumvis minimum, solummodo consumendum? hoc igitur gravitantis globi vi distentum interim contremiscens globum ipsum concitare debebat; de quo sane instituta quoque experimenta (*Paragr.* 18.) suspicionem invexerant; quamobrem quæ adhuc bene cesserant experimenta, pro nihilo posthac habui, despexique.

24. Tum vero prope est factum, ut opus dereliquerim: nisi quod certior per literas factus sum celeberrimos Viros Romæ, Taurini, & alibi, suam tentaminibus iisdem operam sedulo,

& obnixe impendere: quamobrem abiectum animum recepi, novamque etiam deiiciendorum corporum methodum meditatus sum, & exequutus; quam ad ultimum pro voto successam in articulo tertio præsentis opusculi plane exponam.

25. Mihi interim hanc mente volventi, atque excogitanti, obnuntiatum est manuscriptam demonstrationem per mathematicorum manus iamdiu deferri, qua Theodorus Bonati probabat meridionalem aberrationem, quam opusculum meum orientali minorem pollicebatur, futuram fore orientali ipsa sexies maiorem. Ne id igitur me celaret, Authorem per epistolam rogavi, qui & desiderium meum comiter explevit, & inventum suum, propediem illud publicaturus, tantisper distulit, dum quid mihi sua de re videretur acciperet: spondebat imo, recipiebatque se opusculi editione supersessurum, si id per me ita sibi persuasum habuisset; cæterum Iosephi Calandrelli Romani Astronomi diligentissimi experimenta addebat, quorum eventus opinionem suam mirum in modum fulciebat, roborabatque.

26. Primum ego experimentis Iosephi Calandrelli illud obiiciebam, quod microscopii præsidio fuerint destituta. Miratus porro valde sum Theo-

Theodori Bonati demonstrationem multorum mathematicorum sententia fuisse suffultam; non quin calculi recti fuerint, sed quia non eo ducebant, quo ipse contendebat. Me primus monuit Senator Alamanus Isolani, responsionem ad Theodorum Bonati passim reperiri, & manifestam fieri apud Authores, & illos maxime, qui de telluris theoria tradiderunt. Verum, quod mihi in more positum est, longum, & laboriosum problema denuo per memet solvere iam aggressus fueram; de quo tamen ne cum iis quidem communicabam, quibus res meæ antehac ultro patuerant, veritus ne si quid novi evolvendum delitesceret, id mihi, ut quandoque contigit, præriperetur: quamquam solutionibus ad ultimum collatis, nihil profecisse intellexi; nihil enim novi detegere datum est, præter cuiusdam generis serierum in summam congerendarum methodum, quæ adhuc in occulto iacuerat: sed hæc alterius temporis res sit. Theodoro interim Bonati suadebam, eumque hortabar, ut tamdiu super opusculi publicatione cunctaretur, donec per experimenta compertum haberemus, utri nostrum foret a sententia sua recedendum: neque tamen de calculis quoque ultro citroque non conferebamus, sed de iis sermonem iniveram, inque iis me detinebam, qui omnino fere extra rem erant:

rant: quare verba sibi ipse a me dari suspicatus, vel inani epistolico commercio pertæsus, hoc interrupit, & opusculum typis commisit, de quo in secundo articulo sermonem instituam.

27. Theodori Bonati opusculum Bononiæ apparuit postridie quam novis tentaminibus in aperto posuisse videbar, ipsius theoriam paralogismo laborare: problema quoque, de quo supra mentionem habui, ad felicem exitum pervenerat. Cum itaque eos, qui Thedoro Bonati suffragabantur, urgerem, posceremque qui fieret ut experimentorum, calculorumque par exitus non esset, fuit tum denique qui huiusmodi discriminis indicium dederit: quare illico ego demonstrationem (*Art. II. Paragr.* 21.), quæ prædicti problematis corollarium est, itemque aliorum, quæ in Authoribus observare licet, notam feci. Hæc porro ut primum prodiit de paralogismo ipsa accusata est, utpote quæ astronomicarum observationum fundamentum destrueret, ac ea præsertim in dubium revocaret, quæ de locorum, astrorumque latitudinibus rata iam sunt, atque sancita: inanis sane timor, qui brevi evanuit; & eos tum postea gavisus sum laborum meorum prosequutores habuisse, atque vestigiis meis insistentes, quos adversarios offendisse piguisset, magistros vero consuluisse semper gloriabor.

28. Nonnullæ subinde quæstiones ortæ sunt, circa quas satis habeo modeste quid sentiam aperuisse. De harum tantum altera verbum mihi faciendum arbitror (*in Art. I.*); quippe hæc ad opusculi materiam propius pertinere videtur. Opusculum itaque hoc in tres articulos partitus sum; in quorum primo potissima attingo, quæ anno millesimo septingentesimo octogesimo nono in publicum edidi, eaque clarius aperio: alter ea complectitur, quæ tum claritatis gratia erant addenda, quibus ea confero, quæ Theodorus Bonati opposuit: in tertium denique experimenta conieci, quibus theoriam meam roborarem, ratam facerem, atque confirmarem.

29. In longis, & implicatis calculorum semitis declinandis totus fui, & tum maxime, cum operæ prætium non haberetur. Mihi nihilominus in eorum animadversiones sentio fore incidendum, qui omnis omnino mathematicæ doctrinæ expertes, mathematicos incerta plerumque moliri, & inutilia navare autumant: hi scilicet, quod ipsos decet, iudicium ferunt, quibus propterea nulla erit a me responsio. Illud porro semper ægre feram, mathematicos, dum etiam præter communem fere ævi nostri scribendi rationem, civium animos ad rectas, innocentesque me-

meditationes alliciunt, hosque novis cognitionibus imbuunt, excoluntque, nihil ne in hoc quidem præstare videri, quod cives ab otio vitiorum turpissimo, atque reipublicæ infestissimo, revocare, & removere conentur. Et hæc hactenus.

DE DIURNO TERRÆ MOTU.

ARTICULUS I.

De iis, quæ in publicum edidi Anno 1789., & nonnullarum obiectionum Solutio.

1. Sit T terræ centrum, P mundi polus, TQ radius æquatoris, TP axis diurni motus, & QMP meridianus, quem licuit circularem posuisse. Accipiatur $TQ = TM = TP = r$, & arcus terrestris latitudinis $QM = q$; porrigatur radius TM in m, dicaturque $Mm = a$, ut sit $Tm = r + a$; ducantur denique rectæ MN, mn, normales ad TP, ut fiat $MN = cos. q$, atque $TM : MN :: Tm : mn$, idest $r : cos. q :: r + a : mn$, proindeque $mn = \frac{r+a}{r} cos. q$. Vocetur postremo u velocitas, qua punctum M in terræ superficie positum absolvit diurnum motum circa axem mundi TP, si sequentem rationem institueris $MN : u :: mn : \frac{u \cdot mn}{MN} = \frac{r+a}{r} u$, erit hæc diurna velocitas puncti m. Fig. I.

2.

2. Ad dicendarum rerum facilitatem conduxit tellurem finxisse sphæricam, & in orbe suo ab annuo motu consistentem; id enim in subducendorum calculorum errorem vertebat nullum. Labatur itaque corpus de sublimi puncto *m*; ipsum profecto diurna sua tangentiali velocitate horizontaliter propulsum, centralique puncti *T* attractione insimul correptum, ellipsim respectu telluris in absoluto spatio describet, cujus curvæ focus alter dabitur in *T*, & alter apsis in *m*. Arcus tamen in tentaminibus nostris conficiendus poterit indiscriminatim parabolicus existimari; maxime cum parabolicum lapsum iuvet aer, cuius reactione corpus in verticali motu retardatum in curvam sese coniiciet ellipsi deinceps ampliorem, parabolæ propterea satius conferendam. Ne igitur laborem sererem, longis ellipticis calculis reiectis, brevissimis institi parabolicis.

3. Animo nunc concipiamus per punctum *m*, & centrum *T*, normaliter ad *TQmP* transire planum, quod per (*Fig. II.*) repræsentabo, in qua est *T* centrum terræ, *DMZ* circulus terrestris maximus parallelum *MN* (*Fig. I*) tangens in puncto *M*, & *Mm* perpendiculum, quod de puncto *m* suspensum ad centrum *T* sese dirigere supposui; etsi enim in meridiem paululum derivetur (*Artic. II. Paragr.* 20.), id tamen calculis pro orientali aberratione putandis nocebat nihil. Punctum denique *D* ad orientem, *Z* ad occidentem respiciunt. In plano sane *TDmZ* fiet compositio virium corpus sibi in *m* liberum moventium; hocque diurnæ velocitati puncti *m*, nec non suæ gravitatis vi commissum detrudetur per parabolam *mCD*, cujus vertex cadet in *m*, & axis erit *mM*; quamobrem per parabolici iactus leges corpus in labendo recedet in absoluto spatio a præfixo axe *mM*, uti si sola diurna horizontali, & æquabili velocitate puncti *m* sollicitaretur. Et quoniam diurnum arcum æquabiliter interim percurrendum a puncto *M* confundere licet sua cum tangente in ipso puncto *M*; idcirco punctum quoque *M* moveri videbitur per *MC* in eodem plano *TDmZ*; enimvero tangens in *M* communis est circulo maximo *DMZ* cum parallelo *MN* (*Fig.* I.). Cum itaque tum corpus labens, tum punctum *M* parallele, & æquabiliter a prima perpendiculi positione *mM* in orientem ferri censeantur, illud velocitate $\frac{r+a}{r}u$ (*Parag.* 1.), hoc velocitate $u < \frac{r+a}{r}u$; ita tamen ut corpus eodem tempore deorsum raptum occurrat denique

Fig. II.

arcui $M D$, sive tangenti $M C$ ab M describendæ; consequens post lapsum fit, ut corpus prætergressum sit punctum M eodem prope modo ac si, communi punctorum m, M, diurna velocitate omissa, corpus iam a principio lapsus recesserit a perpendiculo $m M$ diurno motu insimul translato velocitate horizontaliter æquabili $\frac{r+a}{r} u - u = \frac{a \cdot u}{r}$ orientem versus. Probato itaque lapsus tempore, quod dicam t, tum postea de puncto m, unde corpus discessit, deducto perpendiculo, cuius auxilio diligenter præfigatur meridianus QMP (*Fig. I.*); reliquum erit, ut orientalem corporis aberrationem a meridiano hoc, sive a perpendiculo ipso $m M$ perscruteris, visurus an facta revera sit $\frac{a \cdot u}{r} t$, tanta scilicet, quantam edere potuerit tempus t ductum in velocitatem $\frac{a \cdot u}{r}$; quæ porro aberrationis formula valet tantum in fine lapsus (*Parag.* 7.). Hæc de orientali corporum aberratione dixeram: verbum addidi de meridionali; sed de hac fusius in sequentibus articulis.

4. Ne autem difficultatibus locum ullum videar reliquisse, iuvabit hic obiectionem a magni nominis Geometra factam refellere. Sit, inquie-

quiebat ipse, TM terrestris radii directio, in qua producta iacet perpendiculum $m M$; sit $M D$ tangens tellurem in M, & $m C c D$ parabola, per quam corpus in spatio absoluto, & vacuo cadens derivatur ad horizontem $M D$ in D; sint $C B$, $c F$, duorum terrestrium radiorum protensorum partes radio $m T$ parallelæ (quod de radiis ad totum arcum $M D$ (*Fig. II.*) spectantibus fingere licet), sibique sic proximæ, ut corpus velocitate in labendo acquisita in curvæ puncto C, temporis momento transire valeat de C in a per rectam $A C a$ tangentem ad curvam in ipso puncto C; appelletur denique $C I$ constans, & momentaneus effectus terrestris attractionis, qua corpora in superficie telluris sphærica ad centrum T iugiter exiguntur. Hisce præmissis manifesto apparet, corpus in C viribus $C a$, $C I$, actum descripturum fore diagonalem parallelogrammi $C I c a$, laterculum videlicet curvæ $C c$. Accedat modo aer; corpori progredienti per $C a$ atmosphæra impedimento erit, ne supradicto horæ momento compleat totum cursum $C a$. Si itaque mente fingas, de quo nemo sane te arguet, corpus sentire in C totam aeris difficultatem sibi per $C a$ perferendam, illud sequetur, ut corpus in C sola velocitate $C o < C a$ pollere intelligatur, velocitate interim Fig. III.

rim *C I* integra manente: quare facta virium *C o*, *C I*, compositione, illud ex mechanicæ legibus sponte fluit, ut corpus atmosphæram pervasurum transferatur de *C c* in *C u* diagonalem parallelogrammi *I C o u*, quam in figura notatam imaginaberis. Demonstratio hæc, concludebat prælaudatus Geometra, ab initio ad motus finem repetita, eo nos tuto ducet, ut plane fateamur corpora naturali nisu per aerem labentia curvam descriptura fore contractiorem illa, per quam in spatio vacuo delaberentur. Atqui ego contrarium dixeram (*Parag.* 1.): huic porro difficultati sic occurri.

5. Resolvatur velocitas tangentialis *C a* in duas sibi normales *C B*, *C F*, quarum hæc horizontalis sit, verticalis altera: velocitati horizontali *C F* nihil sane officit aer, huius enim diurna velocitas communis procul dubio censeri potest cum corpore cadente: corpus vero aerem verticaliter permeans iacturam faciet in velocitate *C B*, quæ idcirco residua fiet certa quædam *C E*; vel, quod postremo in idem exit, attractionis vis prohibebitur quominus effectum suum *C I* integrum operetur, aut consequatur, velocitatibus *C B*, *C F*, intactis manentibus. Viribus itaque *C F*, *C E* coeuntibus, corpus in *C* viam *C a* aditurum confestim tra-

du-

duceretur de *C a* in *C i* diagonalem rectanguli *F C E i*; sed velocitate *C I* cum *C i* concurrente, propelletur per arcum curvæ *C e* diagonalem videlicet parallelogrammi *i C I e*, quam concipies iam exaratam. Ex ipsa porro figuræ inspectione patet plus satis, corpus per atmosphæram ruens in curvam deinceps latiorem quam in spatio vacuo iter suum fore inflexurum. Hac via, ut & ea, quam in sequenti paragrapho insistam, notas quoque difficultates effugi, quibus obnoxia est prædicti Geometræ virium ob fluidi resistentiam compositio. Hisce autem prælaudatus vir omnino acquievit.

6. Non id vero sic omnibus persuasum fuit; alii enim alia reposuerunt: hi autem in duas partes divisi sunt; fuerunt enim qui responsioni meæ vitio dederint virium, quam facio, decompositionem: reliqui vero, ut me ore meo iudicarent, ea protulerunt, quæ opusculo meo minus caute consignaveram. Obiectio prima huc omnis contrahitur, ut resolutarum virium horizontalis *C F* nusquam diurno atmosphæræ motui æqualis sit præter locum *m*. Ut difficultas hæc primum diluatur, libenter dabo velocitatum horizontalium labentis corporis, atque rotantis aeris differentiam calculis subducendam fuisse. Esto itaque *C a* velocitas quam decomposui in Fig. IV.

duas

duas CB verticalem, atque CF horizontalem: excipiatur portiuncula XF, sitque hæc horizontalium prædictarum velocitatum discrimen in fine lapsus: demus postremo aerem iam ab initio motus horizontali velocitati CF obniti velocitate XF, quamquam tum quantitas XF sit omnino nulla. Velocitas certe XF erit vel maxima præ CF; quare ducta ratione hac $CF : XF :: CB : B\Upsilon = \frac{FX . CB}{CF}$, erit quoque $B\Upsilon$ minima præ CB. Hic insuper notare iuvabit velocitatem CB statim ab initio motus maiorem fieri velocitate CI; hæc enim momentaneus attractionis effectus est, illa vero eorumdem effectuum summa; quamobrem etsi velocitas CB quantitate $B\Upsilon$ minuatur, hæc tamen tantula est, ut nusquam in iactu non sit $C\Upsilon > CI$. Age modo rectas $X\alpha$, Υo, parallelas lineis CB, CF; si horizontalem aeris reactionem XF corpori sic communicari intelligas, ut atmosphæra ipsa in occidentem retrogrediatur velocitate XF; fingasque tum postea aerem insimul sursum ascendere velocitate $B\Upsilon$; colliges plane atmosphæram velocitate αo ex $B\Upsilon$, atque XF composita motum corporis per $C\alpha$ ita afficere, ut quo tempusculo venisset in α, pervenerit dumtaxat in o (quotiescumque porro labentis cor-

po-

poris atque aeris densitas una sit, quod nihil ad rem hanc). Sed quo tempusculo corpus normaliter findit aerem velocitate CB, aer ipse sursum attolli censetur velocitate ipsa BC, quam diximus vel maximam præ $B\Upsilon$; ergo intacta manente velocitate CX, velocitas residua $C\Upsilon$ adhuc maxima præ $B\Upsilon$ detrimentum patietur $E\Upsilon$ satis magnum præ $B\Upsilon$, quod tamen mox in re erit posuisse saltem $E\Upsilon > B\Upsilon$. Ducta itaque recta Ei parallela lineæ CF, actaque diagonali Ci in rectangulo $XCEi$, si corpori in C velocitate Co viam Co aditurо, eam aeris reactionem $E\Upsilon$ communicari imagineris, quam velocitate $C\Upsilon$ per verticale spatium $C\Upsilon$ pertulisset, ipsum sane per Ci sese coniiciet; nisi quod velocitatibus Ci, CI, insimul concurrentibus, protrudetur per Ce diagonalem parallelogrammi $iCIe$, quam descriptam concipies. Ut autem demonstrem laterculum curvæ Ce iacere extra curvam Cc in spatio vacuo a labente corpore designandam, illudque proinde semper stare, quod, habita etiam ratione ad horizontalem atmosphæræ resistentiam, quæ ex velocitatum corporis & aeris differentia habetur, corpus nihilominus curvam descripturum sit ampliorem in atmosphera, quam in spatio vacuo; satis erit si ostendero futurum semper fo-

re

re $ue > ux$, quod statim præsto. Nam ex similibus triangulis xcu, CcI, habemus $cu = ao : cI = Ca :: ux : CI$, unde $ux = \frac{ao \cdot CI}{Ca}$; ex similibus item aCB, oCY, obtinemus $ao : Ca :: BY : BC$; unde $\frac{ao}{Ca} = \frac{BY}{BC}$, atque $ux = \frac{BY \cdot CI}{BC}$. Est deinde $ie = CI = io + oe = EY + oe$; est rursus $ie = CI = uo = ue + oe$, unde $io = EY = ue$, ex quibus in unum collatis infero $io = EY = ue > ux = \frac{BY \cdot CI}{BC}$; idest $EY \cdot CB > BY \cdot CI$, quod ex dictis sponte, & manifesto patet, vidimus enim tum $EY > BY$, tum $CB > CY > CI$. Ab hac igitur obiectione expediti ad alteram sermonem convertamus.

7. Cum in opusculo meo condendo id operam dederim ut facilis fierem, & ad omnium captum accommodatus, ea omnia declinavi, ad quæ per planas calculorum vias pervenire vetarer. Supposui itaque corpus iam ab initio motus digredi a perpendiculo mM horizontali relativa velocitate $\frac{a \cdot u}{r}$ (*Parag.* 3.) parabolam mnd descripturum, cuius vertex fuerit m, & mM axis; tellure interim atque atmosphæra in quiete manentibus. Si id igitur, inquiebant nonnulli, ita sit, parabola mnd motu ad perpendiculum relativo absolvenda contrahetur quotiescumque aerem adesse ponamus; quod ex obiectione supra allata (*Parag.* 4.) clare patet. At neutiquam sane res ita se habet, neque enim corpus iam a principio motus recedit a perpendiculo mM relativa horizontali velocitate $\frac{a \cdot u}{r}$; quamquam problematis solutio eodem postremo recidat. Accipiatur punctum quodvis G in perpendiculo mM, nuncupatisque, ut supra, $mM = a$, & radio telluris $TM = r$, appellataque linea $mG = x$, unde $TG = r + a - x$; cum dixerimus u diurnam velocitatem puncti M, si feceris $TM : TG :: u : \frac{u \cdot TG}{TM} = \frac{u(r+a-x)}{r}$, erit hæc diurna velocitas puncti G; atque facta $x = 0$, erit $\frac{u(r+a)}{r}$ diurna velocitas puncti m. Communem modo diurnum motum sic deficere, & auferri sumas oportet, ut, pro variabili quovis puncto G, corpus cadens recedat a perpendiculo mM horizontali relativa velocitate $\frac{u(r+a)}{r} - \frac{u(r+a-x)}{r} = \frac{u \cdot x}{r}$, quæ pun-

Fig. III.

ctorum ipsorum m, G, diurnarum velocitatum differentia est. Fac nunc corpus per spatium vacuum cadens derivatum fuisse in b, ducque lineolam horizontalem Gb; ex legibus galileanis tempus lapsus per mb, quod idem est atque per mG, evadet $t\sqrt{x}$, ubi t est quantitas experimentis detecta. Erit ergo $Gb = \frac{u \cdot x}{r} t\sqrt{x}$, idest horizontalis aberratio Gb æqualis fiet producto ex horizontali velocitate $\frac{u \cdot x}{r}$, & tempore $t\sqrt{x}$ (*Parg.* 3.). Hinc si posueris $Gb = y$, obtinebis curvæ $m\,b\,b\,f\,d$ in spatio vacuo describendæ æquationem $Gb = y = \frac{u \cdot t}{r} x^{\frac{3}{2}}$, quæ ad tertii ordinis lineam est de parabolarum familia.

8. Tria autem hæc animadversione digna sunt. Curva $m\,b\,d$ convexam sese offert perpendiculo mM, non vero concavam uti $m\,n\,d$; id patet ex ordinatæ y exponente $1 < \frac{3}{2}$ exponente abscissæ x. Curvæ $m\,n\,d$, $m\,b\,d$ sese in fine motus secant in d, si ambæ vel in vacuo, vel in spatio aere pleno descriptæ fuerint: appellata enim $x = mM = a$, tempus lapsus per mM

sit

fit $t\sqrt{a}$, habeturque $y = Md = \frac{u \cdot t}{r} a^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{u \cdot a}{r} t\sqrt{a}$; quod idem invenimus (*Parag.* 3.); nisi quod tempus lapsus per mM notavimus tum simpliciter per $t = t\sqrt{a}$ pro præsenti supputatione. Corpus denique constanti attractionis vi normaliter ad MD deorsum pressum curvam $m\,b\,d$ percurrere non valebit, nisi horizontali insimul relativa vi constanter accelerata urgeri intelligatur; cuiusmodi utique est velocitatum diurnarum punctorum m, G, differentia.

9. Resecetur nunc laterculum curvæ bf tempusculo minimo absolvendum, ponamusque corpus per quiescentem atmosphæram labi, ita ut prædicto tempusculo complere valeat cursum dumtaxat bb. Iterato in b constantis attractionis impulsu, si impulsus horizontalis relativus repeteretur idem atque in b, corpus moveri pergeret per bf: vidimus vero (*Parag.* 8.) horizontalem impulsum hunc constanter augeri; ergo de via bf transferetur per bg, iactusque deinceps, sensimque latior fiet si per atmosphæram labatur corpus, quam si in spatio vacuo; quod mihi fuerat demonstrandum.

10. Hæc porro leviter transiisse sufficiat,

ut

ut ne huiusmodi dubitationes aliorum animos obruant, & in errorem trahant: et quamvis hinc ad altiores investigationes mihi aperiatur via, has tamen omittam, cum non sit quamobrem de his nunc magnopere laboremus.

ARTICULUS II.

De iis, quæ in opusculo planius exponenda erant; ubi ad Theodori Bonati opusculum responsio fit, omnisque Theoria clariori methodo completur.

1. Tellurem, hoc quoque in Articulo, ab annuo motu vacantem accipimus, atque sphæricam; quod si de sphæroidea quandoque sermo occurrat, id expresse adnotabimus. Cum itaque corpus ob diurnum terræ motum sese in parabolicam semitam mCD (*Fig. II.*) in labendo coniiciat, qui illud ego per curvam mbd (*Fig. III.*) præter perpendiculum mM prosequutus fueram, duo potissimum prætermisisse visus sum. Atque primum quidem ducta CM tangente in Fig. II.
M ad circulum DMZ, atque DE sinu anguli MTD, profunditas, ad quam corpus post lapsum pertigerit, est $mE < mM$, qua ego mM in calculis usus sum. Antecedentis itaque articuli denominationibus retentis $TM = r$, $mM = a$, & cosinu latitudinis QM (*Fig. I.*), idest $MN = cos.\, q$; Theodorus Bonati sumit sibi K pro tempore lapsus per mCD in spatio vacuo, g diem integrum nuncupat, atque $d:p$ proportionem

 dia-

diametri circuli ad suam peripheriam. Indagat tum postea velocitatem diurnam puncti *m*, concedit hanc cum terrestris attractionis vi componi in immobili plano $\mathcal{T} D\, m Z$, in quo datur centrum attractionis $\mathcal{T}$, suspensionisque labentis corporis punctum *m*; neque negat attractionis directionem pro toto arcu $M D$ censeri posse usque parallelam radio $\mathcal{T} M$, ut iactus propterea $m C D$ parabolicus sit. Calculis deinde submittit arcus $m C D$ amplitudinem $D E = sin.\ M \mathcal{T} D$, acceptoque $cos.\ q = \frac{3r}{4}$, qua de latitudine in opusculo meo agebatur, per notas parabolici iactus regulas elicit $E D = sin.\ M \mathcal{T} D$

$$= 3 \kappa p (r + a) \surd \left(\frac{2 a r}{8 a r g^2 d^2 - (3 \kappa p (r + a))^2} \right),$$

indeque eiusdem anguli $M \mathcal{T} D$ sinum versum, idest $M E = sin\ vers.\ M \mathcal{T} D =$

$$\frac{a\, (3 \kappa p (r + a))^2}{8 a r g^2 d^2 - (3 \kappa p (r + a))^2}.$$

Vocat postremo radium telluris $r = 19613790$ *pedibus parisiensibus* (qui medius est terræ nostræ radius), $a =$ *pedib.* 340, $d : p :: 113 : 355$; $g = 24$ *horis*; $K = 5'' \frac{3}{4}$, quo tempore corpus per atmosphæram decidit ab altitudine *a*; hæcque singula recipit, atque pro ratis habet, ut in opuscu-

lo meo reperiuntur; atque hinc eruit $D E =$ *pedib.* 5623, 0 14, & $M E =$ *ped.* 0, 806004. Supputat tum denique diurnum arcum a puncto *M* in parallelo $M N$ (*Fig. I.*) conficiendum tempore $K = 5'' \frac{3}{4}$, quem in circuli maximi arcum traducit, cuius sinum reperit æqualem *pedib.* 5622, 9209. Sinum postremo hunc demit a sinu $D E$, ut residuam habeat orientalem aberrationem æqualem *pedis pollicibus* 1, cum *pollicis lineis* 2, 47; quam ego rotundiori numero expresseram per *pollices* $\frac{6}{5} =$ *pol.* 1, cum *lin.* 2, 40. Id notavi, ut ne alicuius momenti quantitatem neglexisse viderer, quod sane ex ipsius lineæ $M E$ magnitudine ultro apparebat; cæterum tempus *K* experimentis probatum suam sibi altitudinem $m E$ in calculis vindicat.

2. Methodus deinde mea suspicandi occasionem præbuit, me in meridionali corporum aberratione consideranda in errorem incidisse, perinde quasi, communi punctorum *m*, *M*, diurno motu omisso, existimaverim corpus a prima perpendiculi $m M$ positione in absoluto & immobili spatio $\mathcal{T} D\, m Z$ recessurum fuisse solo arcu $M d$, uti in (*Fig. III.*), non vero toto arcu $M D$; lineola enimvero, sive circuli maximi $\mathcal{T} D M Z$ tangentis parallelum $M N$ (*Fig. I.*) in puncto *M* arcus minimus $M d$ facile censeri

potest arcus paralleli ipsius MN; verum arcus MD, atque ideo punctum D, ad quod delapsum corpus offenderit, recedit satis a parallelo prædicto MN meridiem versus: atqui opusculum meum meridionalem aberrationem hanc profitebatur futuram fore pene nullam. Prælaudatus itaque Theodorus Bonati resecat lineolam
Fig. I.
$ME = ME$ (*Fig. II.*), agit rectam EF normalem ad parallelum MN, et per similia triangula MEF, $M\mathcal{T}N$, detegit $EF = EM$

$$\sqrt{\left(\frac{r^2 - \overline{\cos\ q}^{\,2}}{r^2}\right)} = \frac{EM\sqrt{7}}{4} = \textit{pollic. } 6\tfrac{1}{3}$$

, quæ est distantia puncti D (*Fig. II.*) a parallelo MN. Quantitatem hanc labentium corporum appellat aberrationem meridionalem, quam mihi obiicit orientali iam investigata quinquies, & insuper maiorem.

3. Expedit autem, antequam respondeo, meridionalem istiusmodi aberrationem etiam augere: & re quidem vera, ducta recta eE parallela lineæ MN corpus in meridiem deviabit toto arcu $eM > EF$; arcum porro eM pro recta linea acceptum, ut hic licet, sequenti ratione deteges $EF : eM :: MN : \mathcal{T}M$, unde

$$eM = \frac{EF \cdot \mathcal{T}M}{MN} = \textit{pol. } 6\tfrac{1}{3} \times \tfrac{4}{3} = \textit{pol. } 8\tfrac{4}{9}$$

. Hæc

sa-

sane meridionalis aberratio est, quam se mihi Theodorus Bonati opposuisse arbitratus est; corpus enimvero delapsum recesserit a parallelo MN in meridiem toto arcu eM.

4. Corpora ad meridiem sic vergere neutiquam certe inficiabor; verum aberratio hæc nequit per perpendiculum manifestari: præstat autem, antequam id ostendam, meridionalem istiusmodi aberrationem generali formula complecti. Sit $\mathcal{T}$ centrum terræ, $\mathcal{T}P$ axis diurnæ revolutionis, P mundi polus, $\mathcal{T}Q$ radius æquatoris, Fig. V.
QMP circulus meridianus, MVR parallelus transiens per M, quo in puncto tangitur a circulo illo maximo DMZ, in cuius plano protenso iacet punctum m, ex quo corpus sibi relictum labi diximus per parabolam mCD in plano $\mathcal{T}DmZ$ aere vacuo describendam (*Artic. I. Parag.* 3.). Ducto per D parallelo eDp, quem inter & MVR interiacet meridiani arcus eM, erit eM meridionalis corporum aberratio, quæ vertitur in quæstione. Producto itaque radio $\mathcal{T}Mm$, ad quem normaliter deducatur recta DE, fiet EM sinus versus arcus MD; atque ob arcum eM rectam lineam æmulantem, & quia punctum E est ad paralleli eDp diametrum ep, nancisceris triangula eEM, $\mathcal{T}MN$, rectilinea, & similia, ut prope-

pte-

pterea fuerit $EM : eM :: MN : TN$, unde $eM = \frac{EM \cdot TN}{MN}$. Hinc si nuncupaveris arcum $MD = \varphi$, et terrestrem latitudinem $QM = \Psi$, ut obtineas $ME = sin.\ vers.\ \varphi$, & $TN = sin.\ \Psi$, $MN = cos.\ \Psi$; facto $TM = 1$, consequeris $eM = \frac{sin.\ \Psi\ sin.\ vers.\ \Phi}{cos.\ \Psi}$, quam formulam refert rursus in aliam traducere.

Lemma I.

5. Radium terræ sumam in posterum $TM = 1$. Numeris autem minuta temporis prima, secunda, tertia *&c*: exprimentibus apponam paulo supra lineolas ', '', ''', *&c*:, significantibus vero scrupula spatii prima, secunda *&c.* affigam signa ', '', ''', *&c*:. Sit modo λ angulus diurnus a tellure absolvendus tempore $1''$; cum velocitas in motu æquabili par censeatur spatio per tempus diviso, velocitas angularis diurna telluris erit $\frac{\lambda}{1''}$, quo loco notabis constantem angulum λ ad diversorum circulorum arcus pertinere pro diversa locorum latitudine. Corporum autem in curvas abeuntium vis centrifuga, pro curvæ puncto quovis, eruitur per celebratissimum theorema ex quadra-

dra-

drato velocitatis corporis, in curvæ puncto eodem, diviso per duplum osculi radium ad punctum ipsum: quare vis qua in puncto M sub latitudine $QM = \Psi$ corpora recedere conantur ab N centro paralleli MVR, erit $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\ cos.\ \Psi}$; est enim $\frac{\lambda}{1''}$ velocitas æquabilis diurna puncti M in parallelo MVR si loco λ suus sufficiatur arcus, estque $MN = cos.\ \Psi$ radius osculi curvæ MVR ad puncta singula. Quod si velocitas diurna puncti M, quæ perpendiculariter dirigitur ad planum $PTQM$, ad alia quævis puncta T, t, axis tP, tamquam ad motus centrum referatur, patet vires centrifugas puncti M pro centris T, t, futuras fore $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,TM} = \left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2}$, & $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,tM}$. Singulis igitur $1''$ punctum M recedere nitetur a centris N, T, t, spatiolis $\frac{\lambda^2}{2\ cos.\ \Psi}$, $\frac{\lambda^2}{2}$, $\frac{\lambda^2}{2\,tM}$, quæ propterea virium ipsarum effectus appellabo.

Lemma II.

6. Per literam β significatam intelligo telluris attractionem; quæ, terra a diurno motu quie-

quie-

quiescente, ubique superficiei exerceretur eadem. Tellure autem rotante, vis centrifuga $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,cos.\,\Psi}$ in caussa est, quare corpora quiescentia, præter quæ in æquatore sunt atque in polis, non tendant in attractionis centrum T, sed in variabile aliud t, quod gravitatis centrum libenter appellabo: neque porro ad t exiguntur tota vi β, sed variabili alia θ, quam gravitatem dicam, vel corporum quiescentium pondus; erit autem sub æquatore $\theta = \beta - \left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2}$, sub polis vero $\theta = \beta$. Corpora porro libere cadentia diriguntur utique ad centrum T, sed, si quæ sub polis integra vi β deorsum urgentur excipias, cætera in labendo retrahuntur perpetuo ab eodem T vi centrifuga $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2}$; quare labentia corpora censeri possunt deorsum exigi pondere, aut vi centrali $\Omega = \beta - \left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2}$; quæ sub æquatore fiet $\Omega = \theta$, sub polis $\Omega = \theta = \beta$. Pendula denique, quippe quæ libere centrum petere impediuntur, sentiunt sibi semper inditam vim centrifugam $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,cos.\,\Psi}$, quæ in polis dumtaxat nulla est; gravitant igitur & ipsa in

in idem quiescentium corporum centrum t, & eadem vi θ; quare vibrationes absolvunt uti si, diurno motu ablato, sollicitarentur gravitatis vi, vel pondere θ.

Lemma III.

7. Cum ad verborum circumloquutionem fugiendam mechanicis denominationibus novam adiungere liceat; vim $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,cos.\,\Psi} = \varkappa$ *Axifugam* appellabo, vires autem $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2} = \varepsilon$, & $\left(\frac{\lambda}{1''}\right)^2 \frac{1}{2\,t\,M} = \mu$, *Centrifugas*. Variabiles, huiusmodi vires sunt sub polis nullæ, sub æquatore una. Sit modo variabilis quantitas S spatium, per quod primo $1''$ corpus libere cadit; cum sint S, et $\frac{\lambda^2}{2\,cos.\,\Psi}$, variabilium virium $\beta - \varepsilon$, et $\varkappa$ effectus eodem tempore producendi; cumque caussis effectus conferre fas sit, habebitur $\beta - \varepsilon : S :: \varkappa : \frac{\lambda^2}{2\,cos.\,\Psi}$, unde $\varkappa = \frac{\lambda^2(\beta - \varepsilon)}{2\,S\,cos.\,\Psi} = \frac{\Omega\,\lambda^2}{2\,S\,cos.\,\Psi}$; similiter $\varepsilon = \frac{\beta\,\lambda^2}{2\,S + \lambda^2}$, atque $\mu = \frac{\Omega\,\lambda^2}{2\,S\,.\,t\,M}$. Quod denique ad vim $\varkappa$ attinet ani-

animadvertam, quod appellata α vi centrifuga corporum sub æquatore, si feceris $1 : \alpha :: \cos \Psi : \alpha \cos. \Psi$, consequeris pro eadem latitudine Ψ æquationem $\alpha \cos. \Psi = \varkappa$.

Lemma IV.

8. Differentia diurnorum arcuum a punctis *m*, *M*, describendorum tempore lapsus corporis de iis altitudinibus, ad quas in superficie nostra pertingere licet, ea est, ut in meridionali aberratione calculanda arcus alter pro altero accipi possit nullo prorsus discrimine.

Corollarium I.

9. Vires $\varkappa$, ε, μ, rationem sequuntur $\frac{1}{\cos. \Psi}$, 1, $\frac{1}{t M}$, (*Parag.* 7.); quare $\varkappa : \varepsilon :: 1 : \cos. \Psi$ (& sic de aliis), unde $\varkappa = \frac{\varepsilon}{\cos. \Psi} = \alpha \cos. \Psi$ (*Parag.* 7.), atque idcirco $\varepsilon = \alpha\, \overline{\cos. \Psi}^2$.

Corollarium II.

10. Sequenti inita proportione, *horæ* 23. 56'. 54'', $1 : 360^\circ :: 1'' : \lambda = 15''. 2'''. 28''''$, hic erit anguli λ arcus diurnus in parallelo quoque absolvendus tempore Solis medio 1''. Angulus igi-

igi-

igitur λ sub æquatore arcum circuli maximi intercipiet æqualem $15''. 2'''. 28'''' = \gamma$; quare hac ratione subducta $1 : \gamma :: \cos. \Psi : \gamma \cos. \Psi$, hic erit arcus circuli maximi qui pertinet ad angulum λ sub latitudine Ψ; quamobrem arcus anguli $\lambda^2 = \gamma^2\, \overline{\cos. \Psi}^2$. Hinc sub latitudine Ψ vires $\varkappa$, ε, μ, evadent $\varkappa = \frac{\Omega \gamma^2 \cos. \Psi}{2 S}$,

$$\varepsilon = \frac{\beta \gamma^2\, \overline{\cos \Psi}^2}{2 S + \gamma^2\, \overline{\cos. \Psi}^2}, \quad \mu = \frac{\Omega \gamma^2\, \overline{\cos. \Psi}^2}{2 S . t M}.$$

Scholion I.

11. Attractione β ita in duas decomposita, ut pars altera cum axifuga vi $\varkappa$ in æquilibrio sit, altera evadet quæsita θ, ut videbimus (*Parag.* 21.). Cave tum porro vim θ ad centrum *t* directam iterum vi centrifuga μ imminuas, ut quiescentium corporum, vibrantiumque pendulorum pondus obtineas, quod diximus jam (*Parag.* 6.) idem esse atque θ; nam elisa vi axifuga $\varkappa$, corpora quiescentia, ut & vibrantia pendula, suis in parallelis, non vero per parallelorum tangentes, circumagi coguntur; æque idcirco a quovis centro *t* semper, & ubique dissita.

Scho-

Scholion II.

12. Cave accipias spatium S, atque idcirco mM, pro alterius vis effectu præter Ω. Nam ducta ordinata ED, tempus lapsus per parabolam mCD idem utique est atque per mE profunditatem integra attractione β conficiendam; quare cum sit ME effectus eodem tempore gignendus ex vi ε, reliquum est, ut altitudo mM, de qua corpus ad superficiem nostram revera decidit, & qua sola prædicto tempore accedit ad centrum T, effectus sit vis $\beta - \varepsilon = \Omega$ (*Parag.* 6, 7.). ME vero effectum esse vis ε sic probo. Vis hæc singulis 1'' effectum edere valet $\frac{\lambda^2}{2}$ (*Parag.* 5.); quare nuncupato K tempore lapsus per mCD, ex legibus galileanis habebitur $1 : K^2 :: \frac{\lambda^2}{2} : \frac{K^2 \lambda^2}{2} = \frac{K^2 \gamma^2 \overline{cos. \Psi}^2}{2}$, qui erit vis ε effectus tempore K gignendus. Cum vero punctum M diurno suo motu tempore 1'' arcum circuli maximi absolvat æqualem γ *cos.* Ψ (*Parag.* 10), sequitur ut tempore K arcum compleat $K \gamma$ *cos.* Ψ, cui æqualem haberi posse diximus (*Parag.* 8.) arcum MD tempore eodem a puncto m, sive a corpore de m labente conficiendum. Sed arcum MD sua cum subtensa con-

confundere licet, estque subtensa media proportionalis diametrum inter $2\,TM = 2$, & sinum versum ME; fiet ergo $2 : K\gamma\ cos.\ \Psi :: K\gamma\ cos.\ \Psi : ME$, proindeque $ME = \frac{K^2 \gamma^2 \overline{cos. \Psi}^2}{2}$; quam quantitatem observavimus modo eandem utique esse atque effectum a vi ε tempore K producendum; ex quibus tuto inferes, spatium S, atque ideo mM, effectum esse vis $\beta - \varepsilon = \Omega$, ut supra dixi. Quamquam videbimus (*Parag.* 16) censeri posse $\Omega = \theta$; ita ut corpora omnia in tellurem tendant vi, & pondere eodem; nisi quod communis quiescentium, atque vibrantium corporum (sive pendulorum) directio, alia est a libere labentium directione. Quod porro attinet ad dimetiendam iactus amplitudinem DE præfinito quovis tempore obtinendam, nihil refert utrum corpora deorsum festinent vi β, an Ω, an alia quavis; horizontali etenim velocitate præscripta, parabolicorum iactuum amplitudines temporibus ab initio lapsus defluxis proportionales fiunt, nulla habita ratione ad vim centralem, nisi si ex hac eadem tempus ipsius lapsus fuerit coniiciendum.

Theorema I.

13. Sub sphæroideæ telluris nostræ æquatore est $\varepsilon = \varkappa = \mu = \alpha = \frac{1}{288,031}$ attractionis β. Demonstratio.

Habemus sub æquatore nostro S = *pedib.* 15, 0515, $TQ =$ *ped.* 19680648, estque *cos.* $\Psi = 1$, $\gamma = \frac{TQ}{13713}$; ex quibus, posita attractione $\beta = 1$, per æquationem $\varepsilon = \frac{\beta \gamma^2 \overline{cos\ \Psi}^2}{2S + \gamma^2 \overline{cos.\ \Psi}^2}$ (*Parag.* 10.) obtinetur $\varepsilon = \alpha = \frac{1}{288,031}$ ipsius β; quod erat demonstrandum.

Corollarium III.

14. Hinc sub æquatore nostro erit $\Omega = \theta = \beta - \varepsilon = 0, 996535$ ipsius $\beta = 1$; proindeque integræ vis β effectus æqualis *pedib.* 15, 10383; atque ideo effectus vis ε æqualis *lineis* 7, 5355.

In virium existimatione facienda illud observandum sedulo est, ne vires ipsas ad diversam referas unitatem; quod in vitium tum præcipue labi pronum est, quum de sphæroidea tellure sermo habeatur.

Theorema II.

15. Sumpta denuo altitudine $mM = a$, cum sit $eM = \frac{sin.\Psi\ sin.\ vers.\ \phi}{cos.\ \Psi}$ (*Parag.* 4.), quam formulam in aliam me conversurum esse promisi, dico fieri $eM = \frac{a\varkappa\ sin.\ \Psi}{\Omega}$. Demonstratio.

Posuimus (*Parag.* 4.) $MD = \phi$; vidimus (*Parag.* 11.) $ME =$ *sin. vers.* $MD =$ *sin. vers.* $\phi = \frac{K^2\gamma^2 \overline{cos.\Psi}^2}{2}$; ex legibus galileanis est $1 : K^2 :: S : a$, unde $K^2 = \frac{a}{S}$; igitur *sin. vers.* $\phi = \frac{a\gamma^2 \overline{cos.\ \Psi}^2}{2S}$. Nacti præterea sumus $\varkappa = \frac{\Omega\gamma^2 cos.\ \Psi}{2S}$ (*Parag.* 10.), unde $\frac{\gamma^2 cos.\ \Psi}{2S} = \frac{\varkappa}{\Omega}$; ergo *sin. vers.* $\phi = \frac{a\varkappa\ cos.\ \Psi}{\Omega}$, unde $eM = \frac{sin.\ \Psi\ sin.\ vers.\ \phi}{cos.\ \Psi} = \frac{sin.\ \Psi}{cos.\ \Psi} \times \frac{a\varkappa\ cos.\ \Psi}{\Omega} = \frac{a\varkappa\ sin.\ \Psi}{\Omega}$; quod erat ostendendum.

Corollarium IV.

16. Sit V spatium constans, quod ubique sphæricæ superficiei telluris a diurno motu quiescentis corpora primo 1'' in labendo emetiuntur propter vim β; cum sit (*Parag.* 11.) $\beta - \varepsilon = \Omega$, unde $\beta - \Omega = \varepsilon$, æquationem hanc inter virium ipsarum effectus instituas licebit $V - S = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\gamma^2 \, \overline{cos. \Psi}^2}{2}$ (*Parag.* 5, 7, 10); ex qua $S = V - \frac{\gamma^2 \, \overline{cos. \Psi}^2}{2}$, ubi quantitates V, γ, constantes sunt.

Corollarium V.

17. Restituto valore $\frac{\varkappa}{\Omega} = \frac{\gamma^2 \, cos. \Psi}{2 S}$, substitutoque $S = V - \frac{\gamma^2 \, \overline{cos. \Psi}^2}{2}$, fiet $e M$ $= \frac{a \gamma^2 \, sin. \Psi \, cos. \Psi}{2 V - \gamma^2 \, \overline{cos. \Psi}^2}$; sed est sub polis $cos. \Psi = 0$, sub æquatore $sin. \Psi = 0$, fiet igitur utrobique $e M = 0$.

Theo-

Theorema III.

18. Arcus $e M$ fit maximus ea sub latitudine Ψ, cuius fuerit $sin. \Psi : cos. \Psi :: \sqrt{\left(V - \frac{\gamma^2}{2}\right)} : \sqrt{V}$. Demonstratio.

Formulæ $e M$ valore $\frac{a \gamma^2 \, sin. \Psi \, cos. \Psi}{2 V - \gamma^2 \, \overline{cos. \Psi}^2}$ differentiato, positoque differentiali æquali zero, ut *Maximorum*, *Minimorumque* doctrina fert, ad hanc ultimo æquationem devenies $cos \, \Psi = sin. \Psi \sqrt{\left(\frac{V}{V - \frac{\gamma^2}{2}}\right)}$, ex qua evolvitur proportionalitas $sin \, \Psi : cos. \Psi :: \sqrt{\left(V - \frac{\gamma^2}{2}\right)} : \sqrt{V}$; quod erat demonstrandum.

Corollarium VI.

19. Cum effectus vis centrifugæ α (*Parag.* 7.) sub æquatore sit $\frac{\lambda^2}{2} = \frac{\gamma^2}{2}$ (*Parag.* 10); æquatione vires inter & effectus constituta, fiet $cos. \Psi : sin. \Psi :: \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta - \alpha}$; idest arcus $e M$ fit maximus ea sub latitudine Ψ, cujus *cosinus* ad *sinum* rationem obtineat, quam virium attractionis, & gravitatis radices sequuntur sub

 æqua-

æquatore. Huiusmodi autem latitudo Ψ paululum minor est quam graduum quadraginta quinque.

20. Hactenus perpendiculum $m\,M$ consedit in plano $T\,D\,m\,Z$, neque orientali aberrationi nocebat quicquam: nunc vero hinc eiiciendum est, ut meridionalem aberrationem $e\,M$ de qua Theodorus Bonati egit, nullam ex perpendiculo manifestari posse patefaciamus: Sit itaque
(Fig.VI.) $A\,B$ axis, cui firmiter iuncta sint puncta T, m, sitque T centrum virium quodvis. Corpus profecto M puncto m per filum $m\,M$ adnexum dirigetur ad T in rectam lineam $m\,M\,T$, adhuc dum omnia quiescunt. Mente nunc concipiamus puncta T, m, normaliter ad $A\,B$ in circulis parallelis circumagi velocitatibus suis ab axe $A\,B$ distantiis proportionalibus; corpus sane M ut ab axe liberum, ab eo fugere nitetur; recedet autem per $M\,r$ arcum circuli, cuius radius est $m\,M = m\,r$, remanebit vero in plano $B\,m\,r\,T\,A$; neutro enim ab hoc declinatum quiesceret, quippe vi centrali T ad huiusmodi planum iterum revocaretur. Perpendiculum igitur $m\,M$, atque ideo suspensum corpus M, eo denique in solo puncto r consistere poterit, contra quod vis centralis, quam dicam $T\,r$, sic agat, ut si in duas resolvatur $T\,H$, $H\,r$, pars altera $T\,H$ ad

$A\,B$

$A\,B$ normalis consumatur ad vim axifugam corporis in r elidendam, altera $H\,r$ ad m directa impendatur ad corpus in r per rectam $m\,r\,H$ deorsum exigendum. Patet igitur diurnam telluris revolutionem circa axem $T\,P$ in caussa esse, cur (Fig. V.)
perpendiculum $m\,M$ centrum attractionis T recta respicere prohibeatur, neque corpus M deorsum prematur integra vi β, ut diximus (*Parag. 6*); quamobrem, interim dum corpus de m delabitur in D, perpendiculum $m\,M$ una cum tellure venerit utique in directum ad punctum D, idest in eodem prope meridiano cum D reperietur; atque abs attractionis directione $m\,T$ ad meridiem conversum, meridionalem delapsi corporis aberrationem $e\,M$ penitus delebit. Præstat autem sequenti problemate rem clarius explanare.

Problema I.

21. Sit T sphæricæ telluris centrum cum (Fig.VI.)
figuræ, tum attractionis, $t\,P$ axis diurnæ rotationis, $T\,Q$ radius æquatoris, $Q\,M\,P$ circulus meridianus. Perpendiculum $m\,M$ de recta $m\,M\,T$ vi axifuga repulsum quiescat in $m\,r\,t$; quæritur angulus $r\,m\,M$. Solutio.

Accipiatur, ut supra, $Q\,M = \Psi$, β attractio

ctio centri T, & $\varkappa$ vis axifuga puncti r, quæ ab axifuga punctorum M, q, differet nihil. Vocetur angulus $r m M = \varrho$, qui sane is erit, ut puncta M, r, q, terrestrem latitudinem censeantur habere eamdem, & lineæ $TM = Tq$, Tr, æquales, & parallelæ existimentur. Sumatur denique radius $TM = Tr = \beta$, producaturque directio mr in H, ut vis Tr decomponatur in duas HT, Hr, quarum prima normalis erit ad axem TP, & opposita ex diametro vi $\varkappa$, transibit altera per suspensionis punctum m.

Ob parallelas TM, Tr, erit angulus $r m M = H r T = \varrho$, & $QTM = QTr = \Psi$, atque externus $QHr =$ internis $QTr + HrT = \Psi + \varrho$; sed $Tr : TH :: \sin. THr = \sin. QHr : \sin. HrT$, videlicet $\beta : TH :: \sin.(\Psi + \varrho) : \sin.\varrho$; ergo

$$TH = \frac{\beta \sin.\varrho}{\sin.(\Psi + \varrho)}.$$

Postulat autem problema ut attractionis β pars TH in æquilibrio sit cum $\varkappa$ vi axifuga puncti r; erit ergo $TH = \frac{\beta \sin.\varrho}{\sin.(\Psi+\varrho)} = \varkappa$, idest $\beta \sin.\varrho = \varkappa \sin.(\Psi + \varrho) = \varkappa(\sin.\Psi \cos.\varrho + \sin.\varrho \cos.\Psi) = \varkappa(\sin.\Psi \sqrt{(1 - \overline{\sin.\varrho}^2)} + \sin.\varrho \cos.\Psi)$; quare $\beta \sin.\varrho - \varkappa \sin.\varrho \cos.\Psi = \varkappa \sin.\Psi \sqrt{(1 - \overline{\sin.\varrho}^2)}$, & quadrando $\overline{\sin.\varrho}^2 (\beta - \varkappa \cos.\Psi)^2 = \varkappa^2 \overline{\sin.\Psi}^2$

$(1 - \overline{\sin.\varrho}^2)$, unde $\overline{\sin\varrho}^2 (\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2 \overline{\cos.\Psi}^2 + \varkappa^2 \overline{\sin.\Psi}^2) = \varkappa^2 \overline{\sin.\Psi}^2$, idest $\overline{\sin.\varrho}^2 (\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2) = \varkappa^2 \overline{\sin.\Psi}^2$, & radicem extrahendo,

$$\sin.\varrho = \frac{\varkappa \sin.\Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2}}.$$

Corollarium I.

22. Angulus ϱ pertinet ad circulum telluris maximum, cujus radius est $TM = 1$; si ipsum igitur ad circulum transferre volueris, cuius radius sit $Mm = a$, ut habeas sinum arcus Mr, pones $1 : a :: \sin.\varrho : \sin. Mr$; quare $\sin. Mr =$

$$a \sin.\varrho = \frac{a \varkappa \sin.\Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2}}.$$

Cum itaque arcuum minimorum sinubus arcus ipsos sufficere fas sit, habebitur arcus

$$Mr = \frac{a \varkappa \sin.\Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2}}.$$

Theorema I.

23. Vis Hr, qua perpendiculum, sive corpus quodcumque quiescens in r, gravitat per mrH in tellurem, quam vim (*Parag. 6*) appellavimus θ, fit $Hr = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2}$.

Demonstratio.

Est $Tr = \beta : Hr :: \sin.(\Psi + \rho) : \sin.\Psi$, unde $Hr = \frac{\beta \sin \Psi}{\sin(\Psi + \rho)}$

$$= \frac{\beta \sin.\Psi}{\sin.\Psi \cos.\rho + \sin.\rho \cos.\Psi};$$ obtinuimus modo $\sin.\rho = \frac{\varkappa \sin \Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos.\Psi + \varkappa^2}}$, unde

$$\cos.\rho = \sqrt{(1 - \overline{\sin.\rho}^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2 - \varkappa^2\overline{\sin.\Psi}^2}{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2}\right)}$$

$$= \frac{\beta - \varkappa\cos.\Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2}},$$ proindeque Hr

$$= \frac{\beta\sin.\Psi\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2}}{\beta\sin.\Psi},$$ idest

$Hr = \theta = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2}$; quod erat demonstraudum.

Corollarium II.

24. Fiet igitur meridionalis perpendiculi aberratio $Mr = Mq = \frac{a\varkappa\sin.\Psi}{\theta}$.

Corollarium III.

25. Meridionalem labentium corporum aberrationem invenimus (*Fig. V. Parag.* 15) $eM = \frac{a\varkappa\sin.\Psi}{\Omega}$; vidimus (*Parag.* 6, 7.) $\Omega = \beta - \varepsilon$, & (*Parag* 9) $\varkappa : \varepsilon :: 1 : \cos.\Psi$; unde $\varepsilon = \varkappa\cos.\Psi$, atque $\Omega = \beta - \varkappa\cos.\Psi$; quamobrem $eM = \frac{a\varkappa\sin.\Psi}{\beta - \varkappa\cos.\Psi}$, ideoque $eM : Mr$ $:: \sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2} : \beta - \varkappa\cos.\Psi$.

Corollarium IV.

26. Cum sit $\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos\Psi + \varkappa^2} > \beta - \varkappa\cos.\Psi$, idest $1 > \overline{\cos.\Psi}^2$ (nam $1 = \overline{\cos.\Psi}^2$ fit tantum sub latitudine $\Psi = 0$, ubi habetur $eM = Mr = 0$), erit etiam $eM > Mr$; discrimen porro est ferme nullum; radicali enimvero valore extracto, neglectis terminis per quantitatem minimam $\varkappa^2$ ductis, fiet $\sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa\cos.\Psi + \varkappa^2} = \beta - \varkappa\cos.\Psi$; quapropter existimari potest $\Omega = \theta$ (*Parag.* 12), atque idcirco $eM = Mr$. Quantum igitur corpus in labendo vergit ad meridiem ob diurnum terræ motum; tantumdem, & eadem de caussa eodem vergit perpendiculum, quod propterea meridionalem labentium corporum aberrationem a Theodoro Bonati consideratam manifestabit nullam.

Co-

Corollarium V.

27. Latitudine Ψ quavis accepta, arcus Mr proportionalis erit radio $mM = a$; igitur quod de simplici perpendiculo dictum est, idem valet de composito, angulus enim ϱ constans est pro quavis perpendiculi longitudine. Hinc illud etiam sequitur, ut meridionalis tum perpendiculi, tum labentis corporis aberratio sit ubique telluris rectilinea. Quæ autem de aberratione eM dicta sunt (*Parag.* 17, 18, 19) valent, cæteris paribus, de aberratione Mr.

Corollarium VI.

28. Vidimus (*Parag.* 21, 23) $sin.\, \varrho = \frac{\varkappa\, sin.\, \Psi}{\theta} = \frac{\alpha\, sin\, \Psi\, cos\, \Psi}{\overline{\beta - \alpha\, cos.\, \Psi}^2}$ (*Parag.* 7, 26); si itaque posueris $\Psi = 45^\circ$, $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{288,631}$ (*Parag.* 13) ipsius β; fiet $sin.\, \varrho = \varrho = \frac{1}{577,262}$; est porro radius $1 = 57^\circ : 17' : 44'' : 48'''$; ergo $\varrho = 5' : 57'' : 19'''$; quod ipsum ex sphæroideæ telluris nostræ theoria eruitur, ut videbimus (*Parag.* 47).

Theorema II.

29. Si fuerit K tempus lapsus de altitudine $mM = a$ per spatium vacuum, & $K + t$ per atmosphæram; aberratio meridionalis labentium corporum obtineretur $eM = \frac{a\,(K+t)^2\, \varkappa\, sin.\, \Psi}{\theta\, K^2}$.

Demonstratio.

Meridionalis aberratio proportionem sequitur altitudinis, de qua corpus decidit (*Parag.* 27); si itaque, ut galileanæ leges postulant, feceris $K^2 : a :: (K+t)^2 : \frac{a\,(K+t)^2}{K^2}$; hæc erit altitudo subroganda loco a pro tempore $K+t$; neque enim ex mutata altitudine, mutata quoque velocitatum diurnarum punctorum m, M, differentia errorem invehet ullum (*Parag.* 8); quare evadet $eM = \frac{a\,(K+t)^2\, \varkappa\, sin\, \Psi}{\theta\, K^2}$; quod erat demonstrandum.

Corollarium VII.

30. Meridionalis aberratio eM ex periculis in aperto aere faciendis expectanda crescet ultra perpendiculi aberrationem Mr; perpendiculi enim angulus ϱ idem est adsit aer nec ne. Discrimen hoc in caussa est, quare meridiona-

lis aberratio labentium corporum haberi quandoque possit orientali maior; quod unum in opusculo meo, animadversione cæteroquin dignum, prætermiseram.

Scholion I.

31. Diurnus conicus motus aeris transeuntis per immobile planum $TDmZ$, per quod corpus labitur, atque in boream tendentis, meridionalem ipsius corporis aberrationem eM paululum imminuet; id autem obiter observasse sufficiat. (Fig. V.)

Theorema III.

32. Sphæricum corpus super telluris sphæricæ, vel sphæroideæ, superficie quiescere non potest, nisi plano incumbat, cui normale sit perpendiculum. Demonstratio.

(Fig. VI.) Conquiescat corpus sphæricum in q, facto æquilibrio inter ipsius axifugam vim, & attractionis β partem TH; ipsum urgebitur sola gravitate, vel pondere θ per directionem rqH (*Parag* 6), ita scilicet ut perpendiculi directio mr transeat per contactus punctum q, idest normalis sit plano, cui sphæricum corpus insidet; quod erat demonstrandum.

Co-

Corollarium VIII.

33. Quod de sphærico corpore dictum modo est, extenditur æque ad quiescentes fluidas superficies, quibus propterea perpendiculum ubique terrarum normale sit oportet. Hoc tanquam hydrostaticum principium ratione, & experientia probatum, adhuc receptum fuit; demonstratione autem fulcitum fuisse, credo ego, iuvabat.

Corollarium IX.

34. Aquæ sub æquatore altius quam alibi extollantur oportet; atqui neque ubique sub æquatore aquæ terris imminent, neque montes supra mare altius elevantur sub polis quam sub æquatore; solida ergo tellus nostra sphæroideam & ipsa æmulatur formam, in quam fluida superstrata pars sese componat necesse est; idque præsertim cum maxima marium profunditas ne sextam quidem partem differentiæ semidiametrorum telluris attingat. Diurno porro motu ablato, aquæ, altissimis æquatoris maribus exsiccatis, ad polos dilaberentur.

Scho-

Scholion II.

35. Sit itaque semiaxis telluris $OB < OQ$ radio æquatoris, sitque $QMPB$ ellipticus meridianus. Centrum figuræ telluris cadet in O; vis β variabilis erit, variumque centrum attractionis, quod dabitur in radio OQ pro latitudine $\Psi = 0$, & in OB pro $\Psi = 90°$; cuiusvis autem puncti q attractionis directio qT erit semper ad aliquod punctnm T radii OQ. Corpora libere cadentia de m ferentur in immobili plano transeunte per rectam Tm normaliter ad $BmQO$, interim dum perpendiculum mr, & corpora quiescentia in q, gravitabunt per rectam $mrqt$ in radii OQ variabile punetum H; quamobrem rectam mH gravitatis directionem appellabo (*Parag. 6*). De angulo HmO, ad quem perpendiculum mr cum telluris radio mO sese componit, mentio passim habetur apud astronomiæ Authores; eruitur enim ex elliptico meridiano QMB per semiaxium OB, OQ, differentiam iuxta hydrostaticum prædictum principium (*Parag. 33.*); vel ex revolventis telluris theoria, ut paulo infra videbimus. De angulo autem HmT, quem faciunt in q attractionis, gravitatisque directiones, neminem dum scripsisse credo; etenim ne apud eos quidem, qui

de telluris theoria expresse tradiderunt, verbum de ipso offendi.

Scholion III.

36. Vidimus (*Parag. 23.*)

$$\theta = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\varkappa \cos \Psi + \varkappa^2}$$

$$= \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\,\overline{cos.\Psi}^2 + \alpha^2\,\overline{cos.\Psi}^2} \quad (\textit{Par. 7}),$$

quæ æquatio habetur quantitates inter θ, α, β, $cos.\Psi$; sed β est constans, α, & θ innotescere possunt ex hysocronorum pendulorum longitudinibus observatis sub polis, æquatore, & latitudine quavis Ψ; quantitatum ergo θ, & α valoribus per pendulorum longitudines detectis, inque æquationem

$$\theta = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\,\overline{cos.\Psi}^2 + \alpha^2\,\overline{cos.\Psi}^2}$$

invectis, incognitæ latitudinis Ψ cuiusvis eruetur $cos.\Psi$; idest paralleli cuiusvis radius detegetur. Cave porro id ipsum ad tellurem sphæroideam transferas; tum enim attractio β variationem subit: nisi quod posita $\beta = F\,cos.\Psi$ (ubi est F functio latitudinis Ψ ex telluris figura determinanda), latitudo Ψ, parallelique cuiusvis radius eadem ac innuimus via poterit determinari. Cum denique demonstraverim haberi posse $\Omega = \theta$ (*Parag. 26*) pro actuali diurno telluris motu;

patet ex pendulorum longitudinibus educi posse de quonam spatio S, quod est vis Ω effectus (*Parag.* 7), labi debeant corpora sub latitudine quavis adhuc incognita.

37. Antecedens problema solui pro perpendiculi altitudine b, quæ ad terræ radium proportionem obtineat quamvis; atque pro vi centrifuga sub æquatore quavis f, idest dato quovis diurno motu. Generalem solutionem pro tellure sphærica iis hic evolvendam trado, qui calculis indulgere velint plusquam opusculum hoc ferre poterat; estque hæc, $\beta\, sin.\, \rho\, (1 + b)$

$$= f\, sin.(\Psi + \rho)(cos.\Psi + 2b\, sin.(\Psi + \frac{\rho}{2})\, sin.\frac{\rho}{2})\left(1 + 4\,\overline{sin.\frac{\rho}{2}}^{2}(b^2 + b)\right)^{\frac{3}{2}}$$

in qua incognita evolvenda est $sin.\,\rho$.

38. Responsio hæc mea Theodoro Bonati arridere multum visa est; quod etsi satis habuerim, referre tamen existimavi, si hic ultimo ea potissimum delibarem, quæ hac super re a celeberrimis Authoribus tradita sunt; ut in aperto ponatur, omnia mecum inter eosdem perbelle convenire, meque nihil nunc exhibere, quod non ex ipsorum doctrinis eliciatur, quamquam id ipsi evolvere prætermiserint.

39. Sit ω semiaxium telluris OQ, OB differentia: demonstratum est corpus (idemque dices de suspenso perpendiculo) in superficie nostra collocatum sub latitudine quavis Ψ relata ad centrum figuræ O, attrahi viribus $sin.\,\Psi\,(1 + \frac{9\omega}{5})$, & $cos.\,\Psi\,(1 + \frac{3\omega}{5})$, per directiones minori axi $OB = 1$, & maiori $OQ = 1 + \omega$, parallelas; idque si tellus a diurno motu abstineat. Eadem porro sub latitudine Ψ, si tellus diurno motu cieatur, vis axifuga in caussa est, quare attractionis pars $cos.\,\Psi\,(1 + \frac{3\omega}{5})$ imminuatur, fiatque $cos.\,\Psi\,(1 - \frac{\omega}{5})$, parte altera intacta manente. Demonstratum denique est, acceptumque, esse $\omega = \frac{1}{230}$ semiaxis OB.

40. Termini per quantitatem minimam ω^2 ducti ab hisce formulis expulsi sunt; quod in posterum quoque præstabo: ex iis autem quæ sequantur observemus. Agatur tellus diurno motu nec ne, latitudo perpendiculi mM censeri potest constans. Dirigatur itaque per r recta $rS = cos.\,\Psi\,(1 + \frac{3\omega}{5})$ parallela radio OQ, & $rL = sin.\,\Psi\,(1 + \frac{9\omega}{5})$ parallela OB; ducta

profecto diagonali rT. in rectangulo $LTSr$, erit $rT = \sqrt{\overline{rS}^2 + \overline{rL}^2} = 1 + \frac{\omega}{5}\left(9\,\overline{\sin.\Psi}^2 + 3\,\overline{\cos.\Psi}^2\right) = \beta$; idest corpus sub latitudine Ψ attractionem sentiet $rT = \beta$, eritque variabilis vis β directio rT. Accepta porro super recta rS portione $rX = \cos.\Psi\left(1 - \frac{\omega}{5}\right)$, completoque rectangulo XL, erit huius diagonalis $rH = \sqrt{\overline{rX}^2 + \overline{rL}^2} = 1 + \frac{\omega}{5}\left(9\,\overline{\sin.\Psi}^2 - \overline{\cos.\Psi}^2\right) = \theta$; idest corpora quiescentia sub latitudine Ψ gravitabunt in H vi θ, & directione rH. His prævisis sit.

Lemma I.

41. Est $\frac{\sin.(\Psi \pm \delta)}{\cos.(\Psi \pm \delta)} = \frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi} \pm \frac{\sin.\delta}{\cos.\Psi\cos.(\Psi \pm \delta)}$; etenim $\cos.\Psi\sin.(\Psi \pm \delta) = \sin.\Psi\cos.(\Psi \pm \delta) \pm \sin.\delta = \sin\Psi(\cos.\Psi\cos.\delta \mp \sin.\Psi\sin.\delta) \pm \sin.\delta = \sin\Psi\cos.\Psi\cos.\delta \pm \sin.\delta\,\overline{\cos.\Psi}^2 = \cos.\Psi\sin.(\Psi \pm \delta)$; quæ æquatio identica est.

Lem-

Lemma II.

42 Expunctis terminis per ω^2 ductis, erit $\frac{5 + 9\omega}{5 + 3\omega} = 1 + \frac{6\omega}{5}$ & $\frac{5 + 9\omega}{5 - \omega} = 1 + 2\omega$. Quod per actualem divisionem potest per se quisque experiri.

Problema II.

43. Acto telluris radio Or, nuncupatoque angulo $rOQ = mOQ = \Psi$, qui angulus latitudinis est pro punctis r, q, m, M; angulum invenire $TrO = TmO$. Solutio.

Dicatur angulus $rTQ = mTQ = \pi$; ex rectangulo LS habebitur $rS : TS = rL :: \cos.\pi : \sin.\pi$, idest (*Parag.* 40) $\cos.\Psi\left(1 + \frac{3\omega}{5}\right) : \sin.\Psi\left(1 + \frac{9\omega}{5}\right) :: \cos.\pi : \sin.\pi$; unde $\frac{\sin\pi}{\cos.\pi} = \frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi}\left(\frac{5 + 9\omega}{5 + 3\omega}\right) = \frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi} + \frac{6\omega\sin.\Psi}{5\cos.\Psi}$ (*Parag* 42). Est vero angulus externus $rTQ = \pi = TOr + TrO$; igitur vocato $TrO = \delta$, erit $\pi = \Psi + \delta$, quare $\frac{\sin\pi}{\cos.\pi} = \frac{\sin.(\Psi + \delta)}{\cos(\Psi + \delta)} = \frac{\sin\Psi}{\cos.\Psi} + \frac{6\omega\sin\Psi}{5\cos.\Psi}$; sed est (*Parag.* 41)

sin.

$$\frac{\sin.(\Psi+\delta)}{\cos.(\Psi+\delta)}=\frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi}+\frac{\sin.\delta}{\cos\Psi\cos.(\Psi+\delta)};$$

igitur $\frac{\sin.\delta}{\cos.(\Psi+\delta)}=\frac{6\,\omega\sin.\Psi}{5}$; videlicet $\sin.\delta$

$$=\frac{6\,\omega\sin.\Psi}{5}(\cos.\Psi\sqrt{1-\overline{\sin.\delta}^2}-\sin.\Psi\sin.\delta),$$

& quadrando, ut radicale signum removeatur,

$$\overline{\sin.\delta}^2\left(1+\frac{12\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}{5}+\frac{36\,\omega^2\,\overline{\sin\Psi}^4}{25}\right)$$

$=36\,\omega^2\,\overline{\sin.\Psi}^2\,\overline{\cos.\Psi}^2\,(1-\overline{\sin.\delta}^2)$; reducendo denique, & radicem extrahendo, ut incognita quæsita quantitas seiungatur, erit

$$\sin.\delta=\frac{6\,\omega\sin.\Psi\cos.\Psi}{5+6\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}.$$

Theorema I.

44. Vocato angulo $H\,r\,O=H\,m\,O=\sigma$, erit $\sin.\sigma=\frac{2\,\omega\sin.\Psi\cos.\Psi}{1+2\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}$. Demonstratio.

Cum sit angulus externus $QHr=QOr+HrO=\Psi+\sigma$; cumque in rectangulo $X\,L$ obtineatur $rX:rL::\cos.QHr:\sin.QHr$; erit (*Par.* 40) $\cos.\Psi\left(1-\frac{\omega}{5}\right):\sin.\Psi\left(1+\frac{9\,\omega}{5}\right)$ ::

$::\cos.(\Psi+\sigma):\sin.(\Psi+\sigma)$; quare $\frac{\sin.(\Psi+\sigma)}{\cos.(\Psi+\sigma)}=\frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi}\left(\frac{5+9\,\omega}{5-\omega}\right)$; idest (*Parag.* 41) $\frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi}+\frac{\sin.\sigma}{\cos.\Psi\cos.(\Psi+\sigma)}$ $=\frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi}+\frac{2\,\omega\sin.\Psi}{\cos.\Psi}$ (*Parag.* 42.); unde $\frac{\sin.\sigma}{\cos.(\Psi+\sigma)}=2\,\omega\sin.\Psi$; quæ æquatio illi similis est, quam modo (*Parag.* 43) tractavimus; nisi quod ponendum est $\delta=\sigma$, $5=1$, $6=2$; ex quibus habebitur

$$\sin.\sigma=\frac{2\,\omega\sin.\Psi\cos.\Psi}{1+2\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2};$$ quod erat ostendendum.

Corollarium I.

45. Sinus angulorum minimorum arcubus ipsis æquiparari possunt: erit igitur arcus anguli $H\,r\,T=H\,r\,O-T\,r\,O=\sigma-\delta$

$$=\frac{2\,\omega\sin.\Psi\cos.\Psi}{1+2\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}-\frac{6\,\omega\sin.\Psi\cos\Psi}{5+6\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}$$

$$=\frac{4\,\omega\sin.\Psi\cos.\Psi}{5+16\,\omega\,\overline{\sin.\Psi}^2}=\sin.H\,r\,T=\sin.H\,m\,T,$$

quem aberrantis perpendiculi angulum appellavivimus ρ (*Parag.* 21), invenimusque *sin.* $\rho =$ arcui anguli $\rho = \frac{\varkappa \, sin. \, \Psi}{\theta}$.

Corollarium II.

46. Formularum *cos.* $\Psi \left(1 + \frac{3\omega}{5}\right)$, *cos.* $\Psi \left(\frac{1-\omega}{5}\right)$ (*Parag.* 39) differentia, idem est ac vis axifuga pro latitudine Ψ, quæ idcirco fiet $\varkappa = \frac{4 \, \omega \, sin. \, \Psi}{5}$; quod idem exhibet æquatio $\alpha \, cos. \, \Psi = \varkappa$ (*Parag.* 7); etsi hæc ad tellurem sphæricam, illa ad sphæroideam, pertineant. Valore autem $\varkappa$ pro ω substituto habebitur

$$sin. \; H m T = \frac{\varkappa \, sin. \, \Psi}{1 + \frac{4 \varkappa \, \overline{sin \, \Psi}^2}{cos. \, \Psi}}.$$

Theorema II.

47. Est *sin.* $H m T$, modo deductus ex Authorum theoriis de tellure sphæroidea, æqualis *sin.* $\rho = \frac{\varkappa \, sin. \, \Psi}{\theta}$, ut pro tellure sphærica detexi (*Parag.* 21). Vidimus enim (*Parag.* 40)

$$\theta = 1 + \frac{\omega}{5}\left(9 \, \overline{sin. \, \Psi}^2 - \overline{cos. \, \Psi}^2\right)$$

$$= 1 + \varkappa \left(\frac{9 \, \overline{sin \, \Psi}^2 - \overline{cos. \, \Psi}^2}{4 \, cos. \, \Psi}\right) \text{ (Parag. 46);}$$

quæ quantitas vix differt abs $1 + \frac{4 \varkappa \, \overline{sin. \, \Psi}^2}{cos. \, \Psi}$; quapropter haberi utique potest *sin.* $H m T =$ *sin.* $H r T = \frac{\varkappa \, sin. \, \Psi}{\theta} =$ *sin.* ρ. Et re quidem vera, posita latitudine $\Psi = 45°$, fit angulus $H m T = \frac{4 \, \omega \, sin. \, \Psi \, cos. \, \Psi}{5 + 16 \, \omega \, \overline{sin. \, \Psi}^2}$ (*Parag.* 45) $= \frac{1}{579}$ $= 5'. \, 56''. \, 15'''$, qui nihil fere distat ab angulo ρ, quem obtinuimus (*Parag.* 28).

Corollarium III.

48. Angulus pariter, quem facit attractionis directio $r T$ cum radio $r O$ sub latitudine graduum 45 eruitur $\delta = 8'. \, 56''. \, 41'''$; ut propterea fiat angulus $\sigma = H m T + \delta = 14'. \, 52''. \, 56'''$; ut ex angulorum ipsorum valoribus (*Parag.* 43, 44) eruere licet.

49. Nolim tamen hæc ita accipias, quasi mathematico rigore fuerint demonsrata; problemata enim pro sphærica, & sphæroidea tellu-

Iure seiunctim soluta discrimen aliquod secum ferant necesse est: profecto alia via angulum σ investigant Astronomi accuratiores, deteguntque $\sigma = 14' . 59''$ (*Cagnoli Trigonom. Parag.* 807); quare & angulus *H m T* fiet æqualis $5' . 58'' . 40'''$, qui paululum maior est angulo ρ. Sed ut quid plura? in animo enim erat probare, ea ex celeberrimorum virorum theoriis erui posse, quæ primus equidem dilucidasse, non vero produxisse videbar. Hactenus de calculis; nunc autem, opusculo meo ab omni accusatione, labeque purgato, ad experimenta transitum faciamus.

AR.

ARTICULUS III.

Experimentorum expositio, quorum exitu antecedens Theoria confirmatur.

1. Machinamentum *A B C D* ex cupro conflatum per cochleas *K* confiximus horizontali trabi (*Præfa. Parag. 9.*) in turris summitate. In verticali plano *A B C D* fulcra prominebant quatuor, quorum duobus horizontalibus O, O, commissus erat vectes *E F I*, ita ut libere rotans strictim attingeret vectem *H L M* horizontalibus aliis fulcris *P*, *P*, substentatum. Prominebat etiam fulcrum *N* in horizontalem cylindrum satis exilem desinens, cui occurrebat vectes *H L M* in æqualem cylindrum terminatus. Prominebant denique uncus *S* suleulo instructus, cuius usum mox animadvertemus; & elastrum *Q R*, cuius vi cylindrus vectis *H L M* urgebatur contra cylindrum fulcri *N*. Fig.VII.

2. Vectes *E F I* deorsum pressus in *E* vectem *H L M* removebat ab *N*: tunc globi *G* filo (*Præf. Parag. 10*) uncus *S* circumdabatur ad eandem semper partem, &, filo in sulculo percurrente, globus quantum fieri poterat

rat elevabatur. Vecte tum postea EFI iterum remisso, elastrum QR in vectem HLM tanta vi obnitebatur, ut filum cylindris M, N, perstrictum ferre valeret globum plumbeum, cuius diameter par erat pedis pollici. Filum itaque supra MN scindebatur, quo facto, globus tantulum descendebat, ut libere quaquaversus vibrationibus posset indulgere. Lychno deinde altera globi facies illustrata per microscopium inspiciebatur (*Præf. Parag.* 14), & vibrationibus postremo penitus ablatis, depresso denuo in E vecte EFI globus illico cadebat. Machinamentum hoc ea ingeniosissimi Artificis nostri Francisci Comelli industria, & diligentia elaboratum, perfectumque fuit, quam tanta utique periculorum nostrorum difficultas postulabat.

3. Perpendiculum, quod in globum plumbeum desinebat, de constantis suspensionis globi G puncto ad turris fundum deduximus, adnexumque globum plumbeum vasculo aqua pleno immersimus; atque ut primum concitata atmosphæra sese composuit, exploravimus quam cerei plani (*Præf. Parag.* 12) partem perpendiculum pene quietum respiceret, eandem enim a cadentibus globis præter propter percutiendam fore arbitrabamur: Ceræ porro planum certo, fixo-

fixoque rectangulari limite circumdatum fuit, & præfinitum, cuius latera TZ, TV, meridianis observationibus sic fuerunt determinata, ut TZ terrestrem parallelum, TV vero meridianum circulum præferrent, occidentalem hunc, illum borealem pro variis punctis X, ad quæ cadentes globi sese directuros fore confidebam; neque enim novo hoc excogitato, advocatoque machinamento, atque tot habitis, tantisque cautionibus, diligentiam meam, spemque sic ultra frustrandam esse pertimescebam, ut fossarum excentricitatem multam forem offensurus. Foveæ itaque uniuscuiusque centrum X normaliter ad TZ atque TV, relatum fuit, ut indicavimus (*Præf. Parag.* 20), adiuvante Aloysio Tagliavini iuvene in mathematicis præsertim disciplinis expectationis vel maximæ, quem nobis accersivimus, ut defuncti Amici (*Præf. Parag.* 23.) munus obiret. Hic porro periculorum nostrorum ordo fuit, & exitus, non omissis cæli vicissitudinibus, quæ tentamen unumquodque sunt comitatæ (*Præf. Parag.* 6).

Anno 1791. Experimentorum institutorum dies.	Deiectorum globorum numerus; atque Atmosphæræ status tempore lapsus.	Distantia centri cuiusque fossæ a meridiano *TV*, per pollices lineas, & decimales partes.	Distantia eiusdem centri a parallelo *TZ*, antecedenti mensura putata.
Experimentum I. Tertio nonas Iunii. Ab hora noctis prima in tertiam usque.	I. quietus. Aere tranquillo. II. pene quie. Flante vento.	Pol. 6: 11,25 Pol. 7: 6,50	Pol. 3: 6,83 Pol. 3: 10,67
Exper. II. Pridie nonas eiusdem. Ab hora noctis prima in tertiam.	I. quietus. Cælo tranquillo. II. quietus. Aere leviter flante.	Pol. 7: 3,00 Pol. 7: 0,00	Pol. 3: 10,67 Pol. 3: 11,17
Exper. III. Decimotertio kalendas Augusti. Ab hora noctis prima in tertiam.	I. quietus. Aere tranquillo. II. quietus. Aere tranquillo.	Pol. 7: 2,00 Pol. 7: 2,25	Pol. 4: 0,33 Pol. 4: 0,00
Exper. IV. Tertio nonas eiusdem. Ab hora noctis prima in secundam cum horæ dimidio.	I. quietus. Aere pene tranquillo. II. quietus. Cælo tranquillo.	Pol. 7: 0,00 Pol. 7: 3,00	Pol. 3: 11,50 Pol. 4: 0,00
Exper. V. Postridie nonas eiusdem. Ab hora noctis prima in tertiam cum dimidio.	I. quietus. Aere tranquillo. II. quietus. Aere pene tranquillo.	Pol. 7: 2,00 Pol. 7: 1,25	Pol. 3: 11,50 Pol. 4: 0,00

Exper. VI. Postridie idus eiusdem. Ab hora noctis prima in quartam.	I. quietus. Aere pene tranquillo. II. pene quie. Vento validè flante.	Pol. 6: 11,25 Pol. 8: 5,00	Pol. 3: 10,67 Pol. 4: 4,17
Exper. VII. Tertio nonas Septembris. Ab hora noctis prima in quintam.	I. quietus. Aere tranquillo. II. quietus. Aere tranquillo. III. quietus. Aere tranquillo. IV. quietus. Aere pene tranquillo.	Pol. 7: 2,00 Pol. 7: 1,25 Pol. 7: 0,00 Pol. 6: 11,25	Pol. 4: 0,00 Pol. 4: 0,00 Pol. 3: 11,17 Pol. 4: 1,00

Distantiarum a meridiano *TV* summa - - - - - - - - - - - Pol. 115: 2,00
quæ per globorum numerum sexdecim divisa dat distantiam centrorum fossarum mediam - - - - - - - - - - - - Pol. 7: 2,375

Distantiarum a parallelo *TZ* summa - - - - - - Pol. 63: 5,68
quæ per globorum numerum divisa dat mediam distantiam - - - - - - - - - - - - - - - Pol. 3: 11,605

4. Cum igitur, quod nemini experimenta huiusmodi capienti adhuc obtigerat, globos sexdecim periculo datos fossas eruisse observaverimus ferme concentricas (excepto sexti experimenti globo altero, de quo tamen miraberis nihil); finem experimentorum facere decrevimus; præsertim cum, autumno accedente, futurum fore intelligeremus, ut ab opere prosequendo deterreremur. Ut vero labori nostro extremam manum imponeremus, perpendiculum deduximus, globorum aberrationem tandem perscrutaturi (*Præf. Parag.* 12.)

5. Constabat perpendiculum ex æreo filo maxime flexili, quo uncus *S* fuerat obvolutus (*Parag.* 2), quodque extremitate altera marmoreum globum ferebat, cuius diameter exæquabat pollices $2\frac{1}{3}$. Horizontali ceræ plano (*Præf. Parag.* 12) cubus incumbebat ex ligno constructus, & intro plenus aqua, in quam mormoreus perpendiculi globus immersus, æreo filo suspensus detinebatur. Fila duo serica superioris quadratæ superficiei cubi diagonales referentia, ad quatuor in eius centro angulos sese intersecabant, in quorum unoquoque vertice si perpendiculum quiescens commoraretur, suam in gravitatis centrum directionem satis faceret manifestam: perpendiculi videlicet positum investigabamus ea ipsa methodo, qua utuntur Astronomi in meridianis construendis. (*Eustachius Manfredi. De Gnomone Divi Petronii*).

6. Tanta autem in hoc opere aeris tranquillitas desiderabatur (*Præf. Parag.* 6), ut reliquo anni tempore perpendiculi quietem frustra expectaverimus; quamquam nocturnis quandoque horis, quando civitas otiabatur tota, aer ipse omnino ferme sileret. Observationes itaque in sequentem annum produximus, atque omnem præter spem meam, idibus Februarii, aere ab hora noctis secunda in quintam usque perfecte tranquillo, perpendiculum tandem aliquando conquievit. Prædictis itaque filis extensis, cubique positione ad opus accommodata, perpendiculum denique in singulis cuiusque anguli verticibus per horæ dimidium quiescentem observare licuit; intelleximusque ipsius directionem fuisse plane determinatam. Crastina tamen die periculum renovandum esse constituimus; quod etsi interdiu frustra tentatum sit, nocte tamen facta, iisdem horis, eodemque hesternæ diei successu iteratum est, ventis id nobis benevole concedentibus; lucernulæ enim flammam ad aperta singulorum turris parietum ostiola etiam altissima (*Præf. Parag.* 6) appositam nullo agita-

 tio-

tionis motu iactari, rectamque assurgere observavimus. Infima itaque cubi superficie in ceræ plano præfixa, cubum removimus, atque insculptæ quadratæ superficiei centrum diagonalibus iuvantibus lineis detectum ad lineas *TV*, *TZ*, retulimus, invenimusque a meridiano *TV* distare *Pollicibus* 6 : 6, 0, & a parallelo *TZ Pol.* 3 : 6, 333.

7. Distantia itaque perpendiculi modo reperta *Pol.* 6 : 6, 0, a distantia media *Pol.* 7 : 2, 375 (*Parag.* 3) dempta residuam dat orientalem delapsorum globorum aberrationem mediam æqualem *lineis* 8, 375. Distantia vero perpendiculi *Pol.* 3 : 6, 333 deducta a media distantia globorum *Pol.* 3 : 11, 605 (*Parag.* 3) residuam offert meridionalem aberrationem mediam *lin.* 5, 272.

8. Visuri ergo an calculi & experimenta pari passu procederent, periculum instituimus de tempore globorum lapsus per atmosphæram. Id per Aloysium Tagliavini faciendum curaveram transacto anno dum ruri degerem; ipse autem ego repetii eadem methodo, & exitu eodem. Pendulum in turris vertice collocavimus, quod in scrupula secunda tempus dividebat: manum autem exercitatione multa sic assueveram, ut quatuor, quinque, & sex ictibus, secundum

quodque temporis scrupulum in quatuor, quinque, & sex æquales partes distribueret. Quo itaque momento alterum temporis scrupulum a pendulo pulsabatur, eodem ego una manu globos dabam lapsui, altera lapsus tempus perscrutabar; in ima etenim turre machinamentum construxeram huiusmodi, ut quo momento delapsus globus fundum attingeret, eodem ipso lucernula extingueretur de sublimi turre conspicienda. Experimentis igitur sæpenumero repetitis comperuimus tempus lapsus fuisse quam proxime $4'' \frac{1}{5}$; quod iusto maius est si illud ex tentaminibus colligas hac de caussa, & de eadem turre alias captis (*Riccioli. Almagest. Lib. IX. Sect. IV. Capit. XVI.*); est vero iusto minus si pericula cousulas clarissimi viri Desaguliers (*Curs de Physi. Exper. Vol. I. Pag.* 368): quamobrem (*Artic. II. Parag.* 29) accipiam $K = 4''$, ut fert altitudo $mM =$ *pedib.* 241 (*Præf. Parag.* 6), & $K + t = 4'' \frac{1}{5}$; in formula porro $\frac{a \cdot u}{r} t$ (*Art. I. Parag.* 3) sufficiam $K + t$ loco t, ut orientalis aberratio sit $\frac{a \cdot u}{r}(K + t)$.

Corollarium I.

9. Est $u\,(K+t) = \overline{15''.\,2'''.\,28''''} \times 4\tfrac{1}{5}$ (*Art. II. Parag.* 10) $= 63''.\,10'''.\,21''''$, qui arcus ad parallelum turris nostræ est, cuius latitudo habetur $\Psi = 44^{\circ}.\,30'$; cum itaque sit *cos.* $\Psi = 0,71325$, si dixeris $1 : cos.\,\Psi :: 63''.\,10'''.\,21'''' : \overline{63''.\,10'''.\,21''''} \times \overline{cos.\,\Psi} = 45''.\,3'''.\,28''''$, erit $u\,(K+t) = 45''.\,3'''.\,28'''' = 162\,208''''$ in circirculo telluris maximo. Est insuper $a =$ *pedibus* 241, & radius medius $r =$ *ped.* 19613790; unde $\frac{a}{r} = \frac{1}{81385}$; atque idcirco $\frac{a\,.\,u}{r}\,(K+t) = \frac{162208''''}{81385}$. Est denique in telluris circulo maximo $5'''' =$ *pol.* 1, 516; ergo $\frac{a\,.\,u}{r}\,(K+t) =$ *pol.* $\frac{1285336}{2034625} =$ *lineis* 7, 581, quæ orientalis calculorum aberratio orientali aberratione media *lin.* 8, 375 experimentis obtenta (*Parag.* 7) minor est *lin.* 0, 794. Quod si in aberratione media experimentorum putanda, sexti tentaminis globum secundum reiicias, ratione iterum expuncta, orientalem periculorum aberrationem mediam invenies *lin.* 7, 400, quæ a calculorum aberratione differt *lin.* 0, 181; ut cal-

calculis propterea experimenta, quantum desiderari poterat; respondeant.

Corollarium II.

10. In formula $M\,r = \frac{a \times sin.\,\Psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta \times cos.\,\Psi + \kappa^2}}$ (*Art. II. Parag.* 22) $= \frac{a\,\kappa\,sin.\,\Psi}{\beta - \kappa\,cos\,\Psi}$, positis $\beta = 1$, & $\kappa = \alpha\,cos.\,\Psi$ (*Art. II. Parag.* 7) $= \frac{cos.\,\Psi}{288,\,631}$ (*Art. II. Parag.* 13), habebitur

$$M\,r = M\,q = \frac{a\,sin.\,\Psi\,cos.\,\Psi}{288,\,631 - \overline{cos.\,\Psi}^2}.$$

Est porro $a =$ *pedib.* 241, *cos.* $\Psi =$ *cos.* $44^{\circ},\,30' = 0,\,71325$, & *sin.* $\Psi = 0,\,70091$; ergo $M\,q =$ *pollic.* 5 : 0, 215. Si modo feceris (*Art. II. Parag.* 29) $K^2 : (K+t)^2 ::$ *pol.* 5 . 0, 215 : $\frac{(K+t)^2\,pol.\,5\,.\,0,\,215}{K^2} = \frac{(4\frac{1}{5})^2}{4^2}$ *pollic.* 5: 0, 215 $=$ *pol.* 5 : 6, 378, hæc erit meridionalis aberratio corporum labentium per atmosphæram, a qua si demas aberrationem *pol.* 5 : 0, 215 in spatio vacuo obtinendam, cui æqualem fieri diximus aberrationem perpendiculi (*Art. II. Parag.* 26), residuam habebis (*Art. II. Parag.* 30.)

me-

meridionalem delapsorum corporum aberrationem a perpendiculo æqualem *lin.* 6, 163, quæ a media aberratione experimentis manifestata *lin.* 5, 272 (*Parag.* 7) differt *lin.* 0, 891; quare hac etiam ex parte calculi & experimenta mirifice conveniunt; iis præsertim attentis, quæ diximus (*Art. II. Parag.* 31, 49).

Corollarium III.

11. Orientem inter atque meridiem observabitur corporum aberratio a perpendiculo maxima: eruitur autem hæc ex calculis æqualis *lin.* 9, 930, ex tentaminibus vero (*Parag.* 7) *lin.* 9, 896; quarum quantitatum discrimen *lin.* 0, 034 consideratione nulla dignum est.

12. Globos interim plumbeos lævi, & tenuissima picea superficie illitos, obductosque, qua mercurius plumbo consociari vetaretur, mercurio immersimus eo consilio, ut si massarum centrum caderet extra centrum figuræ, infimum sibi intra mercurium locum vindicaret. Eminens tum postea quiescentium globorum punctum notabamus, per quod iis filum inserebatur (*Præf. Parag.* 10), eosque iterum mercurio probabamus visuri an eodem atque antea modo innatarent. Sic de industria provisum fuisse expecta-

ba-

bamus, ut globi in labendo nullo rotationis motu detorquerentur.

13. Hoc porro tentamen experiri aeris vicissitudines adhuc prohibuere; & quoniam dilata huiusce opusculi editio maiorem sui spem in dies movere videbatur; diutius idcirco publicationi supersedere noxium duxi: quamquam enim quæ in lucem nunc do experimenta a celeberrimis viris frustra dum tentata fuerint; non ea tamen sunt, quæ laudem aliam præter diligentiæ, patientiæque mereantur ullam. Manent vero in turre omnia ad experimentum necessaria, atque occasione oblata, nec non ut amicis morem geramus, paratos globos periculo libenter dabimus.

Scholion.

14. Ex Solis attractione in tellurem sphæroideam illud fit, ut rotantis telluris polus figuræ in curvam lineam quotidie feratur circa actualis rotationis polum perpetuo variabilem, ita tamen ut, elapso die, polus figuræ fiat iterum polus rotationis. Curvam hanc primus æquationi subieci, atque (*Sermone habito in Academia Instituti Scientiarum An.* 1787.) cycloidalem esse demonstravi; sic ut circuli generatoris pun-

ctum

ctum cycloidem describens sit polus figuræ, interim dum rotationis polus fertur super basi, estque semper in contactu cum circulo generatore: quamobrem maxima poli figuræ a rotationis polo aberratio æqualis est cycloidis axi. Demonstravi etiam æquinoctiorum præcessionem ex solis attractione tantam esse, quanta haberetur si dimidia anni parte sol in solstitiorum coluro degeret ad maximam, quam hic loci habet, declinationem; ut ex aliorum quoque hac de re Scriptorum formulis nullo negotio eruitur. Cum porro hæc omnia, discrimine vel minimo, etiam de Luna valeant, cumque æquinoctiorum præcessio polaris prædicti motus effectus sit, qui per observationes innotuit; prædictæ quoque cycloidis axis, quando maximus expectandus sit, facillime detegitur, atque determinatur; quare, calculis subductis, inveni maximam poli figuræ a rotationis polo aberrarionem æqualem *pollicibus* 20 circiter. Suspicatus itaque variationem hanc fuisse caussam periodiei excursus longissimi perpendiculi, de quo se observationes sumpsisse fatetur Alexander Calignoni (*Gassendi Tom. IV. Fol.* 520), illam calculis dedi, veritus ne in perpendiculi aberrationes supra putatas discrimen inveheret; verum discrimen hoc ne ob oculos quidem microscopio instructos cadere posset; quam-

quamobrem si Alexandri Calignoni observationibus fides adhibenda sit, ipsum in fallaces experimentorum circumstantias incidisse dicam, e quibus se labore vix multo expedivit Ximenes (*del Vecchio, e Nuovo Gnomone Fiorentino Lib. I. Cap. VII.*), queis vero nocturnis ego observationibus obviavi.

15. Non alienum denique a re nostra erit, si hic ultimo nonnulla addamus de experimentis per tormentum bellicum ad id opus ineundis: fuerunt enim qui ad hoc periculorum genus fidem adiunxerint, tum præstantissimi Newton authoritate male interpretata præoccupati (*Birch Tom. III. Pag.* 512), (*de la Lande Astron. Tom. I. Liv. V.*), tum clarissimi d' Alembert calculis commoti (*Hist. de l' Acad. Roy. An.* 1771.); quos, ne in longum nimis abeamus, hortabimur ut ea legant, quæ de istiusmodi experimentorum per celeberrimum Mersenne, comitante sibi illustri viro Petit, institutorum exitu scripta nobis reliquerunt summi viri Descartes (*Epistol. Commer. Tom. I. Epist.* 73, *Tom. II. Epist.* 106), & Varignon (*Conjectures sur la Pesanteur*); globos enim per Mersenne verticaliter explosos, iterum sane delapsos, valde vero deviatos, reperire non licuit; ita ut eos Mersenne, Descartes, & Varignon, non relapsos esse, sed per im-

immensa cælorum spatia adhuc exulare, coniectarint.

16. Sed de diurno motu iam satis: de annuo porro quid sentiendum sit, videat quisque in astronomicis disciplinis vel leviter versatus.

FINIS.

Pag.	lin.	*Errata*	*Corrige*
9	27	occurrerepro	occurrere prohi-
14	14	levior	lævior
17	13	filium	filum
21	18	prætium	pretium
37	18	$m E < m M$	$m E > m M$
39	2	5623, 0 14	5623, 0214
47	6	$\gamma^2 \overline{cos. \Psi^2}$	$\gamma^2 \overline{cos. \Psi}^2$
55	10	perpendicuium	perpendiculum
80	19	mormoreus	marmoreus

VIDIT

D. Ignatius Augustinus Scandellari Cleric. Regul. S. Paulli, & in Eccl. Metrop. Bonon. Pœnit. pro Eñ̃o ac Rñ̃o Domino D. Andrea Cardinali Joannetto, Ord. S. Benedicti, Congregat. Camaldul. Archiep. Bonon. & S. R. I. Principe.

Die 18. *Aprilis* 1792.

IMPRIMATUR.

Fr. Aloysius Maria Ceruti Vic. Gen. S. Officii Bonon.

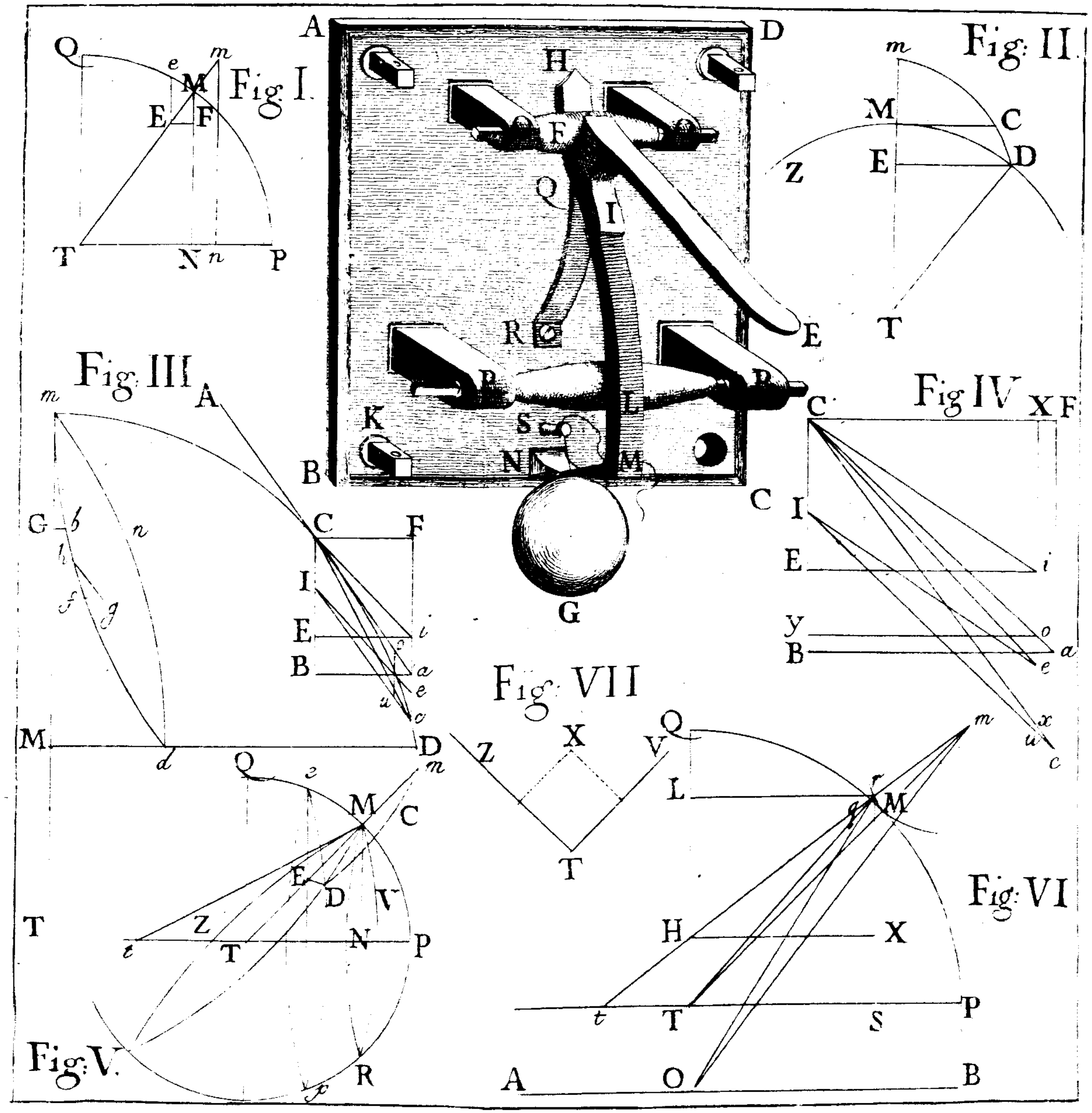
Fig I.
Fig II.
Fig III
Fig IV
Fig V.
Fig VI
Fig VII